# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

***Το παρόν τεύχος δημιουργήθηκε για να διευκολύνει τους μαθητές στην ΑΜΕΣΗ κατανόηση των απαιτήσεων των Προαγωγικών Εξετάσεων.***

**Περιέχει:**

- **83 Ερωτήσεις θεωρίας με απάντηση**
  σύμφωνα με την επίσημη ύλη
  Επίσης δίνονται (εφ' όλης της ύλης)
  - **S.O.S. ΘΕΜΑΤΑ**
    - Θέματα Θεωρίας για τις προαγωγικές εξετάσεις του Μαΐου.
    - Τύποι Ασκήσεων για τις προαγωγικές εξετάσεις του Μαΐου.

- **41 Θέματα προαγωγικών εξετάσεων**
  υποδειγματικά λυμένα και ταξινομημένα ανά κεφάλαιο

- **25 ΠΛΗΡΗ ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**
  (με 2 Θεωρίες και 3 Ασκήσεις για το κάθε θέμα)

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ
(ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ)

## ΜΕΡΟΣ Α'

Μην εξαντλείστε στο να κάνετε τα "πράγματα σωστά" αλλά προσπαθείτε να κάνετε τα "σωστά πράγματα".

Οι έξυπνοι άνθρωποι συνεργάζονται δεν διαπληκτίζονται.

Κανένας στόχος δεν μπορεί να επιτευχθεί χωρίς τη σωστή στρατηγική. Η στρατηγική είναι η λεωφόρος που οδηγεί στην επίτευξη.

Καλή Επιτυχία!

Οι νικητές διαθέτουν δύο πράγματα. Ξεκάθαρους στόχους και επιθυμία να πετύχουν.

Να θυμάστε πάντα ότι ο χρόνος σας είναι το πιο πολύτιμο, το πιο ατομικό, το πιο πεπερασμένο αγαθό.

# ΜΕΡΟΣ Α'

## Κεφ. 1ο | ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

### 1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

**1.** Ποιοι αριθμοί λέγονται **ρητοί** και ποιοι **άρρητοι;**
Τι ονομάζουμε **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α;

Απάντηση

- **Ρητός** λέγεται κάθε πραγματικός αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή ενός κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$ όπου $\mu,\nu$ **ακέραιοι αριθμοί** και $\nu \neq 0$.
- **Άρρητος** λέγεται κάθε πραγματικός αριθμός που δεν είναι ρητός.
- Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού $\alpha$ συμβολίζεται με $|\alpha|$ και είναι **ίση** με την **απόσταση του σημείου**, που **παριστάνει** τον αριθμό $\alpha$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών από την **αρχή** του άξονα.

**2.** Ποιες είναι οι **ιδιότητες** της **πρόσθεσης** και του **πολλαπλασιασμού** πραγματικών αριθμών;

Απάντηση

Αν $\alpha,\beta,\gamma$ πραγματικοί αριθμοί τότε:

| Ιδιότητα | Πρόσθεση | Πολλαπλασιασμός |
|---|---|---|
| Αντιμεταθετική | $\boxed{\alpha+\beta=\beta+\alpha}$ | $\boxed{\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha}$ |
| Προσεταιριστική | $\boxed{\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma}$ | $\boxed{\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma}$ |
| Ουδέτερο στοιχείο | $\boxed{\alpha+0=\alpha}$ | $\boxed{\alpha\cdot 1=\alpha}$ |
| | $\boxed{\alpha+(-\alpha)=0}$ | $\boxed{\alpha\frac{1}{\alpha}=1, \alpha\neq 0}$ |
| Επιμεριστική ιδιότητα | $\boxed{\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma}$ | |

**3.** Ποιοι αριθμοί ονομάζονται **αντίθετοι** και ποιοι **αντίστροφοι**;

Α π ά ν τ η σ η

- Δύο αριθμοί που έχουν **άθροισμα μηδέν**, λέγονται **αντίθετοι**.
- Δύο αριθμοί που έχουν **γινόμενο τη μονάδα**, λέγονται **αντίστροφοι**.

**4.** Τι ονομάζεται **δύναμη** $\boldsymbol{\alpha^\nu}$ με βάση τον πραγματικό $\alpha$ και εκθέτη το φυσικό $\nu \geq 2$ και πως συμβολίζεται;

Α π ά ν τ η σ η

- Η δύναμη με βάση έναν πραγματικό αριθμό $\alpha$ και εκθέτη έναν φυσικό αριθμό $\nu \geq 2$ συμβολίζεται με $\alpha^\nu$ και είναι το γινόμενο $\nu$ παραγόντων ίσων με τον αριθμό α. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu-\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}}$$

- Ορίζουμε ακόμη:
  - $\alpha^1 = \alpha$
  - $\alpha^0 = 1$ με $\alpha \neq 0$
  - $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^\nu}$ με $\alpha \neq 0$ και $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

**5.** Ποιες είναι οι **ιδιότητες** των **δυνάμεων** με βάση έναν πραγματικό αριθμό και **εκθέτη** έναν **ακέραιο**;

Α π ά ν τ η σ η

Για τις δυνάμεις με εκθέτες ακέραιους αριθμούς και εφόσον αυτές ορίζονται, ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\boldsymbol{\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}} \qquad \boldsymbol{\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}} \qquad \boldsymbol{\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha \cdot \beta)^\nu}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}} \qquad \boldsymbol{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu} \qquad \boldsymbol{(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}}$$

**6.** Να δώσετε τον ορισμό της **τετραγωνικής ρίζας** για έναν θετικό αριθμό $x$. Πως ορίζεται η τετραγωνική ρίζα του $\mathbf{0}$;

Α π ά ν τ η σ η

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός θετικού αριθμού $x$ συμβολίζεται με $\sqrt{x}$ και είναι ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό $x$.

Ορίζουμε ακόμη $\sqrt{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$.

**7.** Ποιες είναι οι **ιδιότητες** των **ριζών**;

Απάντηση

- Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού $\alpha$ ($\alpha \geq 0$), έχουμε ότι $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$ για κάθε μη αρνητικό αριθμό $\alpha$.
- Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha$ ισχύει ότι $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^2} = |\boldsymbol{\alpha}|$.
- Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}\sqrt{\boldsymbol{\beta}} = \sqrt{\boldsymbol{\alpha\beta}}$.
- Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$, τότε $\dfrac{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}}{\sqrt{\boldsymbol{\beta}}} = \sqrt{\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}}$.

**8.** Αν $\boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0}$ και $\boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}$, να αποδείξετε ότι $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}\sqrt{\boldsymbol{\beta}} = \sqrt{\boldsymbol{\alpha\beta}}$.

Απάντηση

Για να αποδείξουμε την ισότητα $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}\sqrt{\boldsymbol{\beta}} = \sqrt{\boldsymbol{\alpha\beta}}$, υπολογίζουμε το τετράγωνο κάθε μέλους της ξεχωριστά. Έχουμε:

- $\left(\sqrt{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{\beta}}\right)^2 = \left(\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{\boldsymbol{\beta}}\right)^2 = \boldsymbol{\alpha\beta}$
- $\left(\sqrt{\boldsymbol{\alpha\beta}}\right)^2 = \boldsymbol{\alpha\beta}$

Παρατηρούμε, ότι οι δύο μη αρνητικοί αριθμοί $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{\beta}}$ και $\sqrt{\boldsymbol{\alpha\beta}}$ έχουν το ίδιο τετράγωνο $\boldsymbol{\alpha\beta}$, οπότε είναι ίσοι. Άρα $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}\sqrt{\boldsymbol{\beta}} = \sqrt{\boldsymbol{\alpha\beta}}$.

## 1.2 Μονώνυμα - Πράξεις με μονώνυμα

**9.** Τι ονομάζουμε **αριθμητική παράσταση**. Τι ονομάζουμε **αλγεβρική** παράσταση
και πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται **ακέραια**;

Απάντηση

Εκφράσεις οι οποίες, περιέχουν μόνο αριθμούς ονομάζονται **αριθμητικές παραστάσεις.**

Εκφράσεις οι οποίες, εκτός από αριθμούς, περιέχουν και μεταβλητές, λέγονται **αλγεβρικές παραστάσεις.**

Ειδικότερα μια αλγεβρική παράσταση λέγεται **ακέραια**, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι θετικοί ακέραιοι.

**10.** Τι ονομάζουμε **αριθμητική τιμή** μιας παράστασης;

Απάντηση

**Αριθμητική Τιμή** μιας παράστασης είναι ο αριθμός που προκύπτει, αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές της με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις.

**11.** Τι ονομάζουμε **μονώνυμο**; Τι ονομάζουμε **συντελεστή** και τι **κύριο μέρος** ενός μονωνύμου; Ποιο μονώνυμο ονομάζεται **σταθερό**;
Ποιο μονώνυμο ονομάζεται **μηδενικό**;

Απάντηση

**Μονώνυμο** λέγεται μια ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ των αριθμών και των μεταβλητών της σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού.
Σ΄ ένα μονώνυμο ο **αριθμητικός παράγοντας** λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ το **γινόμενο όλων των μεταβλητών του με τους αντίστοιχους εκθέτες τους** λέγεται **κύριο μέρος** του μονωνύμου.
Οι αριθμοί συμφωνούμε να θεωρούνται ως μονώνυμα και τα ονομάζουμε **σταθερά** μονώνυμα.
Ο αριθμός 0 λέγεται **μηδενικό μονώνυμο**.

**12.** Τι ονομάζουμε **βαθμό** ενός μονωνύμου; Τι **βαθμό** έχει ένα **σταθερό μη μηδενικό μονώνυμο** και τι **βαθμό** έχει το **σταθερό μηδενικό μονώνυμο**;

Απάντηση

Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή, ενώ **βαθμός** του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του.
Τα σταθερά μη μηδενικά μονώνυμα είναι **μηδενικού** βαθμού, ενώ το **μηδενικό μονώνυμο** δεν έχει βαθμό.

**13.** Ποια μονώνυμα ονομάζονται **όμοια**, ποια **ίσα** και ποια **αντίθετα**;

Απάντηση

**Όμοια** ονομάζονται τα μονώνυμα τα οποία έχουν το **ίδιο κύριο μέρος**.
Τα **όμοια** μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται **ίσα** ενώ, αν έχουν αντίθετους συντελεστές, λέγονται **αντίθετα**.

**14.** Πως ορίζεται **το άθροισμα ομοίων μονωνύμων**;

Απάντηση

Το **άθροισμα ομοίων** μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο **όμοιο** με αυτά, που έχει **συντελεστή** το άθροισμα των συντελεστών τους.

**15.** Πως ορίζεται **το γινόμενο μονωνύμων**;

Απάντηση

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της μεταβλητής που εμφανίζονται σε κάθε μονώνυμο.

## 1.3 Πολυώνυμα - Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων.

**16.** Τι ονομάζουμε **πολυώνυμο** και τι **σταθερό** πολυώνυμο;

Απάντηση

Το άθροισμα δύο τουλάχιστον μη όμοιων μονωνύμων, είναι μία αλγεβρική παράσταση η οποία ονομάζεται **πολυώνυμο.**
Κάθε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί και ως πολυώνυμο και ονομάζεται **σταθερό** πολυώνυμο. Ειδικότερα ο αριθμός **0** ονομάζεται σταθερό **μηδενικό** πολυώνυμο.

**17.** Τι ονομάζεται **βαθμός** ενός πολυωνύμου ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του;

Απάντηση

**Βαθμός** ενός πολυωνύμου ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του. Δηλαδή, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των μονωνύμων που περιέχονται στο πολυώνυμο.
Τα σταθερά μη μηδενικά πολυώνυμα είναι **μηδενικού** βαθμού, ενώ για το σταθερό μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

**18.** Τι ονομάζεται **αναγωγή ομοίων όρων**;

Απάντηση

Αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν **όμοια μονώνυμα**, ή όπως λέμε **όμοιοι όροι**, τότε μπορούμε να τους αντικαταστήσουμε με το άθροισμά τους. Η εργασία αυτή λέγεται αναγωγή ομοίων όρων.

## 1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων.

**19.** Πως πολλαπλασιάζουμε:

**α.** **Μονώνυμο** με **πολυώνυμο**;

**β.** **Πολυώνυμο** με **πολυώνυμο**;

Απάντηση

**α.** Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

**β.** Για να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

## 1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

**20.** Τι ονομάζεται **ταυτότητα**;

Απάντηση

**Ταυτότητα** λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

**21.** Να αποδείξετε την ταυτότητα $\boldsymbol{(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}$.

Απάντηση

Έχουμε: $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

**22.** Να αποδείξετε την ταυτότητα $\boldsymbol{(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}$.

Απάντηση

Έχουμε: $(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$.

**23.** Να αποδείξετε την ταυτότητα $\boldsymbol{(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3}$.

Απάντηση

Έχουμε: $(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)=$

$$=\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+2\alpha\beta^2+\beta^3$$

$$=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

**24.** Να αποδείξετε την ταυτότητα $\boldsymbol{(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3}$.

Απάντηση

Έχουμε: $(\alpha-\beta)^3=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)=$

$$=\alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2+2\alpha\beta^2-\beta^3$$

$$=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$$

**25.** Να αποδείξετε την ταυτότητα $\boldsymbol{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2}$.

Απάντηση

Έχουμε: $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta+\beta\alpha-\beta^2=\alpha^2-\beta^2$.

## 1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

**26.** Τι ονομάζουμε **παραγοντοποίηση**;

Απάντηση

Η διαδικασία με την οποία μια παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται **παραγοντοποίηση**.

**27.** **Ποιες είναι οι** χαρακτηριστικές περιπτώσεις **παραγοντοποίησης;**

Απάντηση

| | |
|---|---|
| **Κοινός παράγοντας**<br>Όταν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν **κοινό παράγοντα,** τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με **την επιμεριστική ιδιότητα.** | $\alpha\beta+\alpha\gamma-\alpha\delta=\alpha(\beta+\gamma-\delta)$ |
| **Ομαδοποίηση**<br>Όταν όλοι οι όροι του πολυωνύμου δεν έχουν κοινό παράγοντα, τους χωρίζουμε σε ομάδες έτσι ώστε:<br>• Κάθε ομάδα που δημιουργούμε να έχει κοινό παράγοντα,<br>• Οι παραστάσεις που μένουν μετά την εξαγωγή του κοινού παράγοντα να είναι ίδιες | $\alpha\beta+\alpha\gamma-\delta\beta-\delta\gamma=$<br>$=\alpha(\beta+\gamma)-\delta(\beta+\gamma)=$<br>$=(\beta+\gamma)(\alpha-\delta)$ |
| **Διαφορά τετραγώνων**<br>Η μέθοδος αυτή παραγοντοποίησης στηρίζεται στην ταυτότητα $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$,<br>με την οποία μετατρέπουμε μια διαφορά δύο **τελείων τετραγώνων** σε γινόμενο. | $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$, |
| **Άθροισμα ή διαφορά κύβων**<br>Η παραγοντοποίηση του αθροίσματος ή της διαφοράς δύο κύβων βασίζεται στις δύο γνωστές μας ταυτότητες:<br>$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$<br>$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$<br>Σε κάθε μια από τις οποίες μετατρέπουμε τη διαφορά ή το άθροισμα δύο **κύβων** σε γινόμενο. | $(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3$<br>$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$ |
| **Ανάπτυγμα τετραγώνου**<br>Αν το πολυώνυμο είναι τριώνυμο και έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή:<br>$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ ή $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$, τότε θα γίνει αντίστοιχα<br>$(\alpha+\beta)^2$ ή $(\alpha-\beta)^2$ που είναι γινόμενα παραγόντων αφού<br>$(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$ και $(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)$ | $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$<br>$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$ |

## 1.8 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων

**28.** Τι ονομάζουμε **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο** (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων;

Απάντηση

**Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.)** δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε **γινόμενο πρώτων παραγόντων** ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το **μεγαλύτερο** από τους εκθέτες του.

**29.** Τι ονομάζουμε **Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη** (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων;

Απάντηση

**Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.)** δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε **γινόμενο πρώτων παραγόντων** ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το **μικρότερο** από τους εκθέτες του.

## 1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις..

**30.** Τι ονομάζουμε **ρητή** αλγεβρική παράσταση; Για ποιες τιμές των μεταβλητών ορίζεται μια ρητή αλγεβρική παράσταση;.

Απάντηση

Μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα, λέγεται **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς **ρητή παράσταση**.
Μια ρητή αλγεβρική παράσταση ορίζεται για εκείνες τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ο παρονομαστής παραμένει διάφορος του μηδενός.

**31. Πότε μια ρητή αλγεβρική παράσταση μπορεί να απλοποιηθεί;.**

Απάντηση

Όπως μια αριθμητική παράσταση, έτσι και μια ρητή παράσταση, μπορεί να απλοποιηθεί, αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα.

# 1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων

**32.** Πως κάνουμε **πράξεις με ρητές αλγεβρικές** παραστάσεις;

Απάντηση

Για να κάνουμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις ακολουθούμε τους κανόνες που ισχύουν για τις πράξεις των κλασμάτων. Δηλαδή:

Αν $\alpha, \beta, \gamma$ πραγματικοί αριθμοί τότε:

- ✓ $\alpha\dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{\alpha\beta}{\gamma},\ \gamma \neq 0$, $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\gamma}{\beta} = \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta}, \beta \neq 0$ και $\dfrac{\alpha}{\beta} - \dfrac{\gamma}{\beta} = \dfrac{\alpha-\gamma}{\beta},\ \beta \neq 0$
- ✓ $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta},\ \beta\delta \neq 0$ και $\dfrac{\alpha}{\beta} - \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta},\ \beta\delta \neq 0$
- ✓ $\dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta},\ \beta\gamma\delta \neq 0$ και $\dfrac{\alpha}{\beta} : \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{\delta}{\gamma} = \dfrac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma},\ \beta\gamma\delta \neq 0$
- ✓ $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \dfrac{\alpha}{\beta} : \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{\delta}{\gamma} = \dfrac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma},\ \beta\gamma\delta \neq 0$

# Κεφ. 2ο | ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

## 2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

**33. Τι ονομάζεται εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού, με έναν άγνωστο;**

Απάντηση

**Εξίσωση δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο**, ονομάζεται κάθε ισότητα της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma$ πραγματικούς αριθμούς και $\alpha \neq 0$.

Οι αριθμοί $\alpha$ και $\beta$ ονομάζονται συντελεστές του δευτεροβάθμιου και πρωτοβάθμιου όρου αντίστοιχα και ο αριθμός $\gamma$ σταθερός όρος.

**34.** Έστω η εξίσωση $\mathbf{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \, , \, \alpha\neq 0}$. Τι ονομάζουμε **διακρίνουσα** της εξίσωσης και από ποιον τύπο δίνονται οι λύσεις της εξίσωσης ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας;

Απάντηση

Η παράσταση $\beta^2-4\alpha\gamma$ ονομάζεται διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ και συμβολίζεται με $\Delta$. Δηλαδή είναι $\mathbf{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma}$.

- Αν $\mathbf{\Delta>0}$, τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις οι οποίες δίνονται από τον τύπο

$$\mathbf{x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}}.$$

- Αν $\mathbf{\Delta=0}$, τότε η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την $\mathbf{x=\frac{-\beta}{2\alpha}}$.
- Αν $\mathbf{\Delta<0}$, τότε η εξίσωση δεν έχει λύση (είναι αδύνατη).

**35.** Πως παραγοντοποιείται το τριώνυμο $\mathbf{\alpha x^2+\beta x+\gamma \, , \, \alpha\neq 0}$, αν $\rho_1,\rho_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\mathbf{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \, , \, \alpha\neq 0}$;

Απάντηση

Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ με ρίζες $\rho_1$ και $\rho_2$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο:

$$\mathbf{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)}$$

## 2.4 Κλασματικές εξισώσεις

**36.** Τι ονομάζεται **κλασματική εξίσωση** και πότε ορίζεται;

Απάντηση

Μία εξίσωση, που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή, ονομάζεται κλασματική εξίσωση.
Για να ορίζονται οι όροι μιας κλασματικής εξίσωσης πρέπει όλοι οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός.

# 2.5 Ανισότητες - Ανισώσεις με έναν άγνωστο

**37.** Πως **συγκρίνουμε** (**διατάσσουμε**) δύο πραγματικούς αριθμούς;

Απάντηση

Για να συγκρίνουμε δύο πραγματικούς αριθμούς $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$, που δεν έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα, βρίσκουμε τη διαφορά τους $\boldsymbol{\alpha-\beta}$ και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν.

- ✓ Αν $\boldsymbol{\alpha>\beta}$, τότε $\boldsymbol{\alpha-\beta>0}$.
- ✓ Αν $\boldsymbol{\alpha<\beta}$, τότε $\boldsymbol{\alpha-\beta<0}$.
- ✓ Αν $\boldsymbol{\alpha=\beta}$, τότε $\boldsymbol{\alpha-\beta=0}$.

Αντίστροφα:

- ✓ Αν $\boldsymbol{\alpha-\beta>0}$, τότε $\boldsymbol{\alpha>\beta}$.
- ✓ Αν $\boldsymbol{\alpha-\beta<0}$, τότε $\boldsymbol{\alpha<\beta}$.
- ✓ Αν $\boldsymbol{\alpha-\beta=0}$, τότε $\boldsymbol{\alpha=\beta}$.

**38.** Ποιες είναι οι ιδιότητες της **διάταξης**;

**Απάντηση**

**α.** **Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.**

**Γενικά ισχύει**: Αν $\boldsymbol{\alpha>\beta}$, τότε $\boldsymbol{\alpha+\gamma>\beta+\gamma}$ και $\boldsymbol{\alpha-\gamma>\beta-\gamma}$.

**β.** **Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.**

**Γενικά ισχύει**: Αν $\boldsymbol{\alpha>\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma>0}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\gamma>\beta\gamma}$ και $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\gamma}>\frac{\beta}{\gamma}}$.

**γ.** **Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά**

**Γενικά ισχύει**: Αν $\boldsymbol{\alpha>\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma>0}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\gamma<\beta\gamma}$ και $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\gamma}<\frac{\beta}{\gamma}}$.

**δ.** **Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.**

**Γενικά αποδεικνύεται ότι:** Αν $\boldsymbol{\alpha>\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma>\delta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha+\gamma>\beta+\delta}$.

**ε. Μεταβατική ιδιότητα** Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$.

**στ. Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή,**
**αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$.**

**ζ.** Το **τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού $\alpha$ είναι μη αρνητικός αριθμός, δηλαδή ισχύει $\alpha^2 \geq 0$.** Επομένως:
Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta$ ισχύει

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0, \text{ τότε } \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0.$$

**39.** Να δείξετε ότι:
**Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.**
Δηλαδή: αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$.

Απάντηση

• Για να συγκρίνουμε τους αριθμούς $\alpha + \gamma$ και $\beta + \gamma$, βρίσκουμε τη διαφορά τους και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν. Έτσι έχουμε:

$$(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = \alpha + \gamma - \beta - \gamma = \alpha - \beta.$$

Είναι όμως $\alpha > \beta$, οπότε $\alpha - \beta > 0$.

Δηλαδή η διαφορά $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$ είναι θετικός αριθμός, οπότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

• Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$.

**40. Να δείξετε ότι :**
**Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.**
Δηλαδή: αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.

Απάντηση

• Για να συγκρίνουμε τους αριθμούς $\alpha\gamma$ και $\beta\gamma$, βρίσκουμε τη διαφορά τους και εξετάζουμε αν είναι θετική, αρνητική ή μηδέν. Έτσι έχουμε:
$\alpha\gamma - \beta\gamma = \gamma(\alpha - \beta) \; :(1)$.
Είναι όμως $\gamma > 0$ και $\alpha - \beta > 0$, αφού $\alpha > \beta$. Άρα οι αριθμοί $\gamma$ και $\alpha - \beta$ είναι θετικοί, οπότε έχουν γινόμενο θετικό, δηλαδή $\gamma(\alpha - \beta) > 0$.

Από την ισότητα $(1)$ έχουμε ότι η διαφορά $\alpha\gamma-\beta\gamma$ είναι θετικός αριθμός, οπότε $\alpha\gamma>\beta\gamma$.

- Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε και $\frac{\alpha}{\gamma}>\frac{\beta}{\gamma}$.

**41.** **Να δείξετε ότι:**
**Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.**
Δηλαδή: αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ **θετικοί πραγματικοί** αριθμοί με $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$ τότε $\alpha\gamma>\beta\delta$

Απάντηση

Είναι $\alpha>\beta$ και $\gamma>0$, οπότε έχουμε $\alpha\gamma>\beta\gamma \quad :(1)$

Είναι $\gamma>\delta$ και $\beta>0$, οπότε έχουμε $\beta\gamma>\beta\delta \quad :(2)$

Από τις ανισότητες $(1)$, $(2)$ και σύμφωνα με τη μεταβατική ιδιότητα έχουμε $\alpha\gamma>\beta\delta$.

# Κεφ. 3ο | ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

## 3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

**42.** Τι ονομάζεται **γραμμική εξίσωση** με δύο αγνώστους και τι ονομάζεται **λύση** μιας τέτοιας εξίσωσης; Ποιες είναι οι ιδιότητες της **διάταξης**;

Απάντηση

**Γραμμική εξίσωση** με αγνώστους $x,y$ ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$ και **λύση** της εξίσωσης ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών $(x,y)$ που την **ικανοποιεί**.

**43.** Πότε η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ παριστάνει **ευθεία**;
Τι παριστάνει η εξίσωση $y=\kappa\ ,\kappa\neq 0$ και τι η εξίσωση $y=0$;
Τι παριστάνει η εξίσωση $x=\kappa\ ,\kappa\neq 0$ και τι η εξίσωση $x=0$;

Απάντηση

- Η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ παριστάνει ευθεία, όταν $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$.

- Η εξίσωση $y=\kappa$ ,$\kappa\neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,\kappa)$, ενώ η εξίσωση $y=0$ παριστάνει τον άξονα $x'x$.
- Η εξίσωση $x=\kappa$ ,$\kappa\neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\kappa,0)$, ενώ η εξίσωση $x=0$ παριστάνει τον άξονα $y'y$

## 3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του

**44.** Τι ονομάζουμε **γραμμικό σύστημα** δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και τι **λύση** του συστήματος;

Απάντηση

Αν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους $x, y$ και αναζητούμε το ζεύγος των αριθμών $(x, y)$ που είναι ταυτόχρονα λύση και των δύο εξισώσεων, τότε λέμε ότι έχουμε να επιλύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους** $x$ **και** $y$.

**Λύση** ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους $x$ και $y$ ονομάζεται κάθε ζεύγος $(x, y)$ που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος.

**45. Πόσες λύσεις μπορεί να έχει ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και σε κάθε περίπτωση τι συμπεράσματα προκύπτουν για τις ευθείες του συστήματος;**

Απάντηση

Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους μπορεί να έχει **μοναδική λύση**, **καμία λύση** (το σύστημα ονομάζεται αδύνατο) ή να έχει **άπειρες λύσεις** (το σύστημα ονομάζεται αόριστο).

- Όταν το σύστημα έχει μοναδική λύση, τότε οι δύο ευθείες του συστήματος τέμνονται σε μοναδικό σημείο.
- Όταν το σύστημα είναι αδύνατο, τότε οι δύο ευθείες του συστήματος είναι παράλληλες.
- Όταν το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, τότε οι δύο ευθείες του συστήματος ταυτίζονται.

# 3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

**46. Πώς επιλύουμε αλγεβρικά ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους;**

► Για να επιλύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα, επιδιώκουμε να απαλείψουμε από μια εξίσωση τον ένα από τους δύο αγνώστους και να **καταλήξουμε σε εξίσωση με έναν άγνωστο.**

Δυο από τις μεθόδους με τις οποίες επιτυγχάνεται αυτό είναι οι εξής:

### α. Μέθοδος της αντικατάστασης

► Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς ένα άγνωστο.
Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράστασή του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.
Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.
Η μέθοδος της αντικατάστασης είναι γενική και μας επιτρέπει να λύσουμε οποιοδήποτε σύστημα γραμμικών εξισώσεων.

### β. Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών

► Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σε έναν από τους δύο αγνώστους προκειμένου να τον απαλείψουμε.
Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και λύνουμε.

Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου.
Σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούμε να λύσουμε πιο γρήγορα ένα σύστημα, αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του συστήματος (αν βέβαια οι συντελεστές ενός αγνώστου είναι αντίθετοι ή ίσοι αντίστοιχα).

**Παρατηρήσεις:**

► Αν λύνοντας ένα σύστημα προκύψει μια **αδύνατη εξίσωση** τότε το σύστημα είναι **αδύνατο.**

► Αν λύνοντας ένα σύστημα προκύψει μια **αόριστη εξίσωση** τότε το σύστημα είναι **αόριστο** ή όπως λέμε έχει άπειρες λύσεις.

- **Για να βεβαιωθούμε ότι λύσαμε σωστά ένα σύστημα κάνουμε επαλήθευση. Αντικαθιστούμε δηλαδή τις τιμές των αγνώστων.**
- **Αδύνατο** λέγεται το σύστημα για το οποίο δεν υπάρχουν τιμές των $x, y$ που να το επαληθεύουν.
- Όταν οι δύο εξισώσεις ενός συστήματος **ταυτίζονται** που σημαίνει ότι παριστάνουν την ίδια ευθεία λέμε ότι το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις.**
- **Ισοδύναμα** λέγονται τα συστήματα που έχουν τις **ίδιες ακριβώς λύσεις**.

# Κεφ. 4ο | ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

## 4.1 Η συνάρτηση $y=\alpha x^2$ με $\alpha \neq 0$

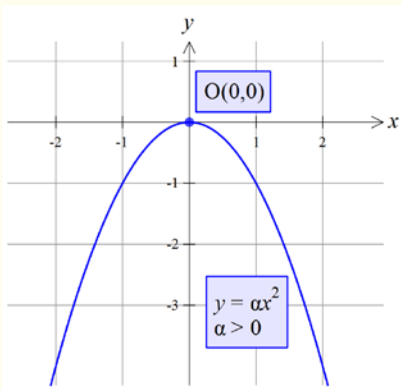
**47.** Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{y=\alpha x^2}$, $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$, όταν $\boldsymbol{\alpha > 0}$ και όταν $\boldsymbol{\alpha < 0}$; Και τι καθορίζει ο συντελεστής $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$.

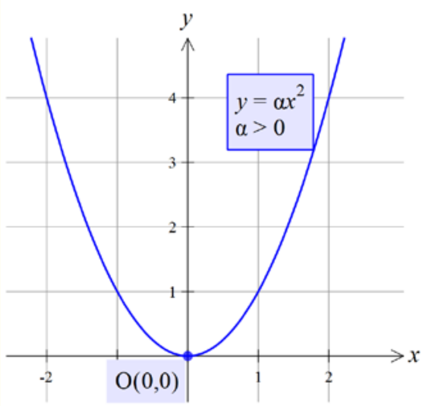
Απάντηση

Η συνάρτηση $y=\alpha x^2$, $\alpha \neq 0$ έχει γραφική παράσταση μια καμπύλη που είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $O(0,0)$ και άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

- Αν $\alpha > 0$, τότε η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα $x'x$ και πάνω και η συνάρτηση παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y=0$, όταν $x=0$.

- Αν $\alpha < 0$, τότε η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα $x'x$ και κάτω και η συνάρτηση παίρνει **μέγιστη τιμή** $y=0$, όταν $x=0$.






Ο συντελεστής $\alpha$ δεν καθορίζει μόνο τη θέση της παραβολής $y = \alpha x^2, \alpha \neq 0$ ως προς τον άξονα $x'x$, αλλά καθορίζει και το **«άνοιγμά» της**. Όταν η απόλυτη τιμή του $\alpha$ αυξάνεται, τότε η παραβολή «κλείνει», πλησιάζει πιο κοντά στον άξονα $y'y$.

# Κεφ. 5ο | ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

## 5.1 Σύνολα.

**48.** Τι λέμε **σύνολο** και πώς το συμβολίζουμε;

Απάντηση

**Σύνολο** είναι κάθε ομάδα αντικειμένων τα οποία διακρίνονται μεταξύ τους με απόλυτη σαφήνεια.

Τα αντικείμενα αυτά ονομάζονται **στοιχεία** του συνόλου.

Για να συμβολίσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε ένα κεφαλαίο γράμμα $A, B$.

**49.** Με ποιους τρόπους **παριστάνονται** τα **σύνολα**;

Απάντηση

Ένα σύνολο μπορεί να παρασταθεί με **αναγραφή** ή με **περιγραφή** των στοιχείων του και με το **διάγραμμα Venn.**

- ✓ **Με αναγραφή των στοιχείων του**

Γράφουμε μία μόνο φορά καθένα από τα στοιχεία του και με οποιαδήποτε σειρά τα τοποθετούμε ανάμεσα σε δύο άγκιστρα

Μερικές φορές χρησιμοποιούμε παρόμοιο συμβολισμό για να παραστήσουμε και ένα σύνολο που έχει πολλά ή άπειρα στοιχεία. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε μερικά στοιχεία του και για τα υπόλοιπα, που θα πρέπει να εννοούνται με σαφήνεια,

Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται

**«παράσταση με αναγραφή των στοιχείων του»**

- ✓ **Με περιγραφή των στοιχείων του**

Αν από ένα σύνολο $\Omega$ επιλέξουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα $\mathrm{I}$, τότε φτιάχνουμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται:

$$\boxed{\mathbf{A}=\left\{\mathbf{x}\in\boldsymbol{\Omega}/\mathbf{x}\ \ \textbf{έχει την ιδιότητα}\ \ \mathbf{I}\right\}}$$

και διαβάζεται

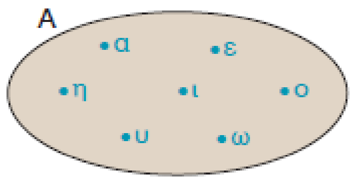
«Το σύνολο των στοιχείων $x$ που ανήκουν στο $\Omega$, όπου $x$ έχει την ιδιότητα $\mathrm{I}$»

Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται

**«παράσταση με περιγραφή των στοιχείων του»**

- ✓ **Με διάγραμμα Venn**

Ένα σύνολο μπορούμε να το παραστήσουμε εποπτικά και με το εσωτερικό μιας κλειστής γραμμής.




**50.** Πότε δύο σύνολα $\mathrm{A}, \mathrm{B}$ λέγονται **ί σ α ;**

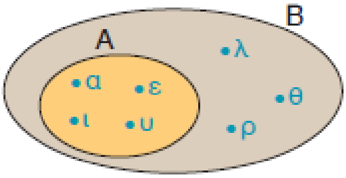
Α π ά ν τ η σ η

**Ίσα** ονομάζονται δύο σύνολα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Γράφουμε $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

**51.** Πότε ένα σύνολο $\mathrm{A}$ ονομάζεται **υποσύνολο** ενός συνόλου $\mathrm{B}$ ;

Α π ά ν τ η σ η

- Ένα σύνολο $A$ ονομάζεται **υποσύνολο** ενός συνόλου $B$, όταν κάθε στοιχείο του $A$ είναι και στοιχείο του συνόλου $B$ και συμβολίζεται με $A \subseteq B$.




**52.** Ποιο σύνολο ονομάζεται **κενό** σύνολο;

Απάντηση

**Κενό** σύνολο ονομάζεται το σύνολο που **δεν περιέχει κανένα στοιχείο** και συμβολίζεται με $\varnothing$.

## 5.1 Δειγματικός χώρος-Ενδεχόμενα.

**53.** Τι λέμε **πείραμα τύχης;** Τι ονομάζουμε **δειγματικό χώρο** ενός πειράματος τύχης και πώς τον συμβολίζουμε;

Απάντηση

✓ **Πείραμα τύχης** ονομάζεται κάθε πείραμα που όσες φορές και αν το επαναλάβουμε, δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμά του με απόλυτη βεβαιότητα.

✓ **Δειγματικός χώρος** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του και συμβολίζεται με $\Omega$.

**54.** **α.** Τι ονομάζεται **ενδεχόμενο** ενός πειράματος τύχης;
**β.** Πότε λέμε ότι ένα **ενδεχόμενο** $A$ **πραγματοποιείται;**
**γ.** Ποιο ενδεχόμενο λέγεται **βέβαιο** και ποιο **αδύνατο;**

Απάντηση

**α.** **Ενδεχόμενο** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου $\Omega$.

**β.** Ένα ενδεχόμενο **πραγματοποιείται,** όταν το αποτέλεσμα του πειράματος σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο του ενδεχομένου.

**γ.** **Βέβαιο** ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος. **Αδύνατο**

ενδεχόμενο ονομάζεται το ενδεχόμενο το οποίο δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος.

**55.** Πότε λέμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα του δειγματικού χώρου είναι **ισοπίθανα**;

Απάντηση

Αν κάθε αριθμός επιλέγεται στην τύχη και δεν έχει κανένα πλεονέκτημα έναντι των άλλων, τότε όλοι οι αριθμοί έχουν την ίδια δυνατότητα επιλογής και λέμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα του δειγματικού χώρου είναι **ισοπίθανα**.

**56.** Τι ονομάζουμε **πιθανότητα** ενός ενδεχομένου $A$;

Απάντηση

### Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Σ' ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα, πιθανότητα ενός ενδεχομένου $A$ ονομάζουμε τον αριθμό:

$$\boxed{P(A)=\frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}}$$

- ✓ Για κάθε ενδεχόμενο $A$ ενός δειγματικού χώρου $\Omega$ ισχύει $0\le P(A)\le 1$.
- ✓ Ισχύουν $P(\Omega)=1$ και $P(\varnothing)=0$.

# ΜΕΡΟΣ Β'

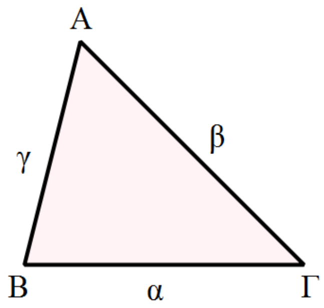
## Κεφ. 1ο | ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

### 1.1 Ισότητα τριγώνων.

**57.** Ποια είναι τα **κύρια στοιχεία ενός τριγώνου** και ποια τα δευτερεύοντα;

Απάντηση

- Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι, οι πλευρές του και οι γωνίες του.
- ✓ **Πλευρές** του τριγώνου ονομάζονται τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τις κορυφές του.
- ✓ **Γωνίες** του τριγώνου ονομάζονται οι γωνίες που ορίζονται από τις πλευρές του.
- Τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου, είναι οι διάμεσοι, τα ύψη και οι διχοτόμοι.

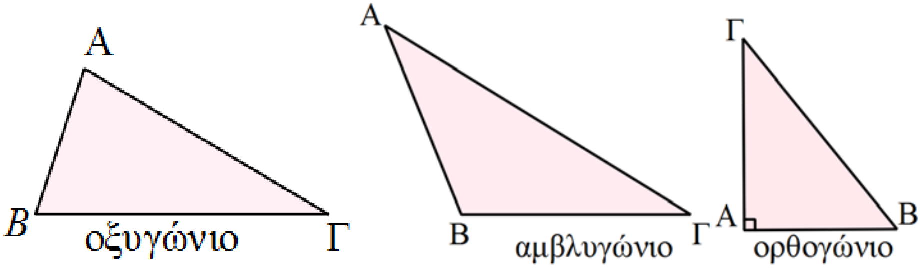



**58.** Σε **τι διακρίνονται** τα τρίγωνα, ανάλογα με το **είδος** των **γωνιών** του;

Απάντηση

Ένα τρίγωνο ανάλογα με το είδος των γωνιών του ονομάζεται:

- **Οξυγώνιο**, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.
- **Αμβλυγώνιο**, όταν έχει μία αμβλεία γωνία.
- **Ορθογώνιο**, όταν έχει μία ορθή γωνία

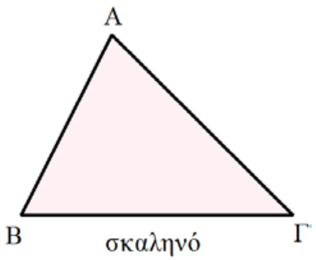


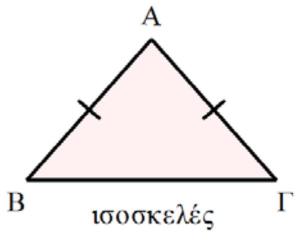

**59.** Σε **τι διακρίνονται** τα τρίγωνα, ανάλογα με τις **σχέσεις** που συνδέονται οι **πλευρές** τους;

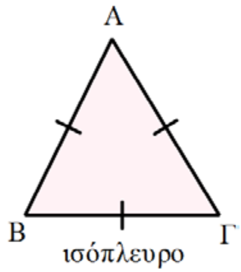
Απάντηση

Ένα τρίγωνο ανάλογα με τις σχέσεις που συνδέονται οι πλευρές του ονομάζεται:

- **Σκαληνό**, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του άνισες.
- **Ισοσκελές**, όταν έχει δύο πλευρές ίσες.
- **Ισόπλευρο**, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες.



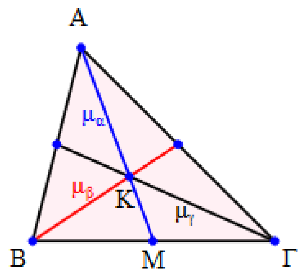



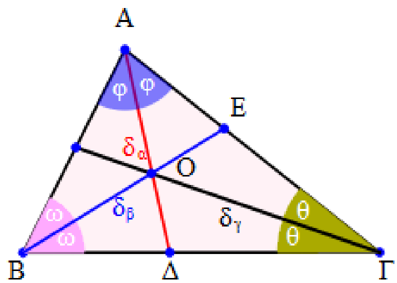

**60.** Τι ονομάζουμε **διάμεσο**, τι **διχοτόμο** και τι **ύψος** σε ένα τρίγωνο;

Απάντηση

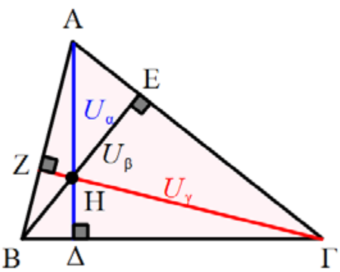
- **Διάμεσος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.




- **Διχοτόμος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μία κορυφή, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.




- **Ύψος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μία κορυφή και είναι κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς.



**61.** Πότε λέμε ότι δύο τρίγωνα είναι **ίσα**;

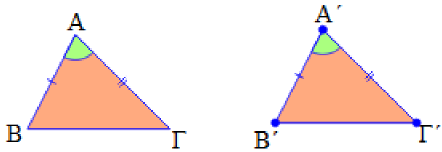
<u>Απάντηση</u>

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.
Ισχύει ακόμη και το αντίστροφο. Δηλαδή:
Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

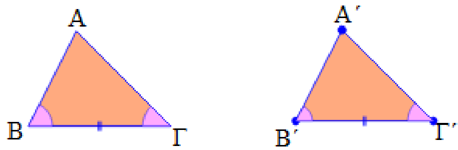
**62.** Να διατυπωθούν τα **κριτήρια ισότητας** τριγώνων.

<u>Απάντηση</u>

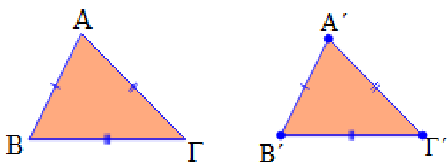
- **$(\Pi-\Gamma-\Pi)$ Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.**




- **$(\Gamma-\Pi-\Gamma)$ Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.**




- **$(\Pi-\Pi-\Pi)$ Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.**




**63.** Να διατυπωθούν τα **κριτήρια ισότητας ορθογωνίων** τριγώνων.

<u>Απάντηση</u>

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν

- δύο **αντίστοιχες** πλευρές ίσες μία προς μία ή
- μία **αντίστοιχη** πλευρά ίση και μία **αντίστοιχη** οξεία γωνία ίση.

**64.** Ποια είναι η **χαρακτηριστική ιδιότητα** των σημείων της **μεσοκαθέτου** ενός ευθυγράμμου τμήματος;

Απάντηση

- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος.

**65.** Ποια είναι η **χαρακτηριστική ιδιότητα** των σημείων της **διχοτόμου** μιας γωνίας;

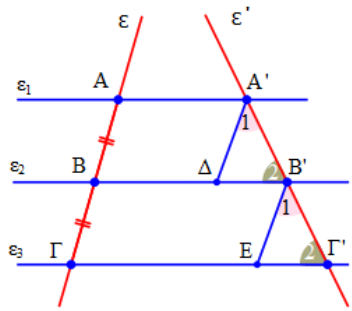
Απάντηση

- Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου της.

# 1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

**66. Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.**

Απάντηση




Παίρνουμε τρεις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ που τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία Α, Β, Γ αντιστοίχως, έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ να είναι ίσα μεταξύ τους.

Αν μια άλλη ευθεία ε΄ τέμνει τις $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ στα σημεία Α΄, Β΄, Γ΄ αντιστοίχως, τότε θα αποδείξουμε ότι και τα ευθύγραμμα τμήματα Α΄Β΄, Β΄Γ΄ είναι ίσα μεταξύ τους.

Πράγματι, αν φέρουμε Α΄Δ//ε, Β΄Ε//ε και συγκρίνουμε τα τρίγωνα Α΄Β΄Δ και Β΄Γ΄Ε παρατηρούμε ότι έχουν:

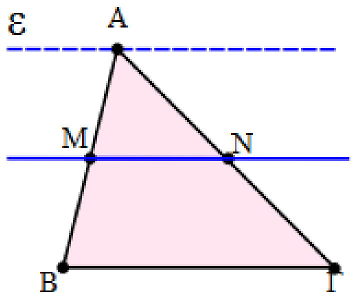
- $A'\Delta = B'E$ γιατί $A'\Delta = AB$, $B'E = B\Gamma$ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων $AA'\Delta B$, $BB'E\Gamma$ αντιστοίχως και από την υπόθεση έχουμε $AB = B\Gamma$.
- $\hat{B}_2' = \hat{\Gamma}_2'$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ που τέμνονται από την $\varepsilon'$.
- $\hat{A}_1' = \hat{B}_1'$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A'\Delta$, $B'E$ που τέμνονται από την $\varepsilon'$.

Τα τρίγωνα αυτά έχουν δύο γωνίες ίσες, οπότε θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση, επομένως είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία. Άρα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $A'B' = B'\Gamma'$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι:
Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

**67. Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, αυτή διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς.**

Απάντηση

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και το σημείο $M$ μέσο της πλευράς του $AB$.
Από το $M$ φέρουμε παράλληλη προς την $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο $N$. Θα δείξουμε ότι $AN = N\Gamma$.
Από το σημείο $A$ φέρνουμε μια βοηθητική ευθεία $\varepsilon // B\Gamma$. Οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon$, $MN$ και $B\Gamma$ ορίζουν ίσα τμήματα στην $AB$, άρα θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην $A\Gamma$. Επομένως $AN = N\Gamma$.




**68. Τι ονομάζεται λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων και με τι ισούται;**

Απάντηση

- Λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ προς το ευθύγραμμο τμήμα $AB$, που συμβολίζεται $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$, ονομάζεται ο αριθμός $\lambda$ για τον οποίο ισχύει $\Gamma\Delta = \lambda AB$.
- Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων ισούται με το λόγο των μηκών τους εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

**69.** Πότε τα ευθύγραμμα τμήματα $\alpha, \gamma$ είναι **ανάλογα** προς τα ευθύγραμμα τμήματα $\beta, \delta$;

Απάντηση

Τα ευθύγραμμα τμήματα $\boldsymbol{\alpha,\gamma}$ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα $\boldsymbol{\beta}$ και $\boldsymbol{\delta}$ όταν ισχύει $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}}$.

Η ισότητα $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}}$ ονομάζεται **αναλογία** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα $\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$.

Τα ευθύγραμμα τμήματα $\boldsymbol{\alpha,\delta}$ ονομάζονται άκροι όροι, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα $\boldsymbol{\beta,\gamma}$ ονομάζονται μέσοι όροι της αναλογίας.

**70.** Ποιες είναι οι σημαντικότερες **ιδιότητες των αναλογιών**;

Απάντηση

Σε μια αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των αναλογιών που ισχύουν και στους αριθμούς χρησιμοποιώντας τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων. Οι σημαντικότερες από τις ιδιότητες αυτές είναι:

- Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.
- Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha\delta=\beta\gamma$.
- Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία.
- Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$ ή $\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$.
- Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.
- Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$.

# 1.5 Ομοιότητα.

**71.** Ποια **πολύγωνα** ονομάζονται **όμοια** και τι ονομάζουμε λόγο ομοιότητας;

Απάντηση

Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι **όμοια.**

Δύο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές ομοίων πολυγώνων έχουν τον ίδιο λόγο, γι΄ αυτό λέγονται **ομόλογες** και ο λόγος τους λέγεται **λόγος ομοιότητας.**

**72. Ποιες προτάσεις προκύπτουν από τον ορισμό της ομοιότητα δύο πολυγώνων;**

Απάντηση

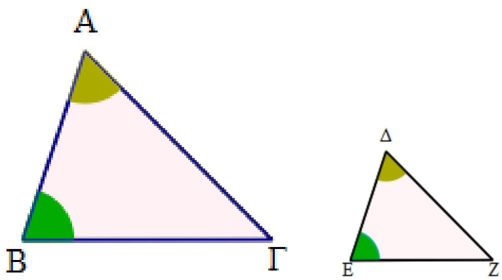
Από τον ορισμό της ομοιότητας δύο πολυγώνων προκύπτουν οι επόμενες προτάσεις:

- Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια μεταξύ τους.
- Δύο ίσα πολύγωνα είναι και όμοια, με λόγο ομοιότητας 1.
- Κάθε πολύγωνο είναι όμοιο με τον εαυτό του.
- Δύο πολύγωνα όμοια προς τρίτο είναι και όμοια μεταξύ τους.

**73.** Πότε λέμε ότι δύο τρίγωνα είναι **όμοια**;

Απάντηση

**Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.**




**74. Ποιος είναι ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων;**

Απάντηση

Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

## Κεφ. 2ο | ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

# 2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με

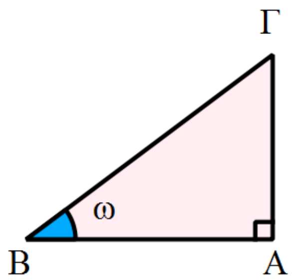
$0° \le ω \le 180°$

**75.** Πως ορίζονται οι **τριγωνομετρικοί** αριθμοί μιας **οξείας γωνίας** ορθογωνίου τριγώνου;

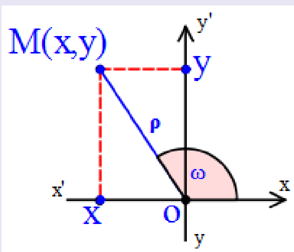
Απάντηση

Είναι:

- $ημω = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \dfrac{ΑΓ}{ΒΓ}$
- $συνω = \dfrac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \dfrac{ΑΒ}{ΒΓ}$
- $εφω = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \dfrac{ΑΓ}{ΑΒ}$




**76.** Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος, να οριστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω, όπου $0° \le ω \le 180°$.




Απάντηση

Είναι:

- $ημω = \dfrac{\textbf{τεταγμένη του Μ}}{\textbf{απόσταση του Μ από το Ο}} = \dfrac{y}{ρ} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

- $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ και
- $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}} = \dfrac{y}{x}$, $x \neq 0$

**77. Για μία γωνία $\omega$ τι τιμές παίρνουν το ημίτονο, το συνημίτονο και η εφαπτομένη;**

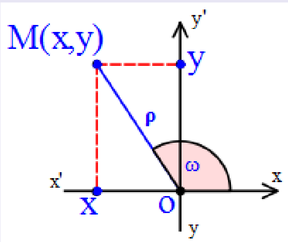
Απάντηση

- Το ημίτονο και το συνημίτονο παίρνουν τιμές από το $-1$ έως το $+1$. Είναι δηλαδή:

$$-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1 \text{ και } -1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$$

- Η εφαπτομένη μπορεί να πάρει ως τιμή οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό.

**78.** Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος, ποιο είναι το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών ανάλογα με το αν το σημείο $M(x,y)$ βρίσκεται στο 1° ή 2° τεταρτημόριο;




Απάντηση

- Αν το σημείο $M(x,y)$ βρίσκεται στο 1° τεταρτημόριο, τότε είναι $\eta\mu\omega > 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$ και $\varepsilon\varphi\omega > 0$.
- Αν το σημείο $M(x,y)$ βρίσκεται στο 2° τεταρτημόριο, τότε είναι $\eta\mu\omega > 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$ και $\varepsilon\varphi\omega < 0$.

**79.** Ποιοι είναι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $0^\circ$, $30^\circ$, $45^\circ$, $60^\circ$, $90^\circ$ και $180^\circ$;

Απάντηση

| ω | $0^o$ | $30^o$ | $45^o$ | $60^o$ | $90^o$ | $180^o$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ημω | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |
| συνω | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ |
| εφω | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | δεν ορίζεται | 0 |

## 2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών.

**80.** Πότε δύο γωνίες ονομάζονται **παραπληρωματικές** και τι σχέση υπάρχει μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών παραπληρωματικών γωνιών;

Απάντηση

Δύο γωνίες ονομάζονται παραπληρωματικές όταν έχουν άθροισμα $180^o$.

Οι παραπληρωματικές γωνίες $\omega$ και $\varphi = 180^o - \omega$ έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή:

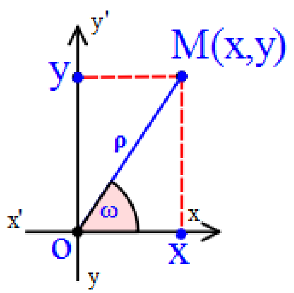
- $ημ\left(180^o - \omega\right) = ημω$
- $συν\left(180^o - \omega\right) = -συνω$
- $εφ\left(180^o - \omega\right) = -εφω$

## 2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας.

**81.** Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε γωνία $\omega$ ισχύει $ημ^2\omega + συν^2\omega = 1$.

Απάντηση

Για την απόσταση $\rho$ ενός σημείου $M(x,y)$ από την αρχή των αξόνων ισχύει:




$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ή \quad \rho^2 = x^2 + y^2$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $\rho^2$, τότε έχουμε:

$$\frac{\rho^2}{\rho^2} = \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} \quad ή \quad \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = 1 \quad :(1)$$

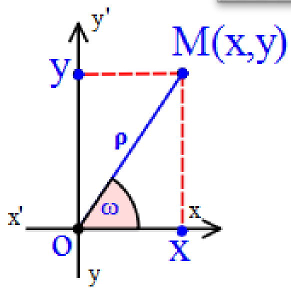
Επειδή $\boldsymbol{\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}}$ και $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}}$, η ισότητα $(1)$ γίνεται:

$$\boldsymbol{(\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\eta\mu\omega)^2 = 1 \quad \text{ή} \quad \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1}$$

**82.** Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε γωνία $\omega$ με $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$, ισχύει $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}$

Απάντηση

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$, με την προϋπόθεση ότι $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$, έχουμε:




$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} \text{ ή } \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{y\rho}{x\rho} \text{ ή } \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\omega.$$

## 2.4 Νόμος των ημιτόνων - Νόμος των συνημιτόνων.

**83.** Να διατυπωθεί ο **νόμος ημιτόνων και ο νόμος συνημιτόνων** σε ένα τρίγωνο .

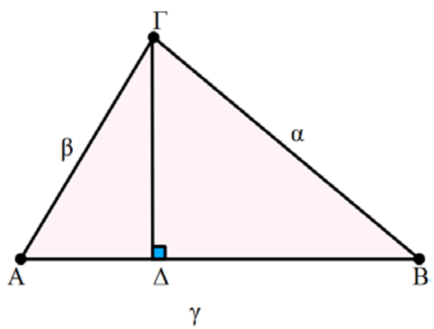
Απάντηση

**Νόμος ημιτόνων**

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση

$$\boldsymbol{\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}}.$$

Δηλαδή οι πλευρές κάθε τριγώνου είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του, συμπέρασμα το οποίο είναι γνωστό ως νόμος των ημιτόνων.

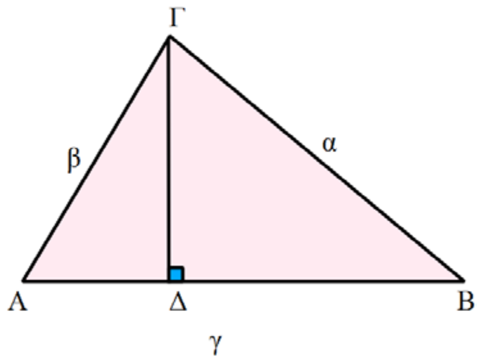



**Νόμος συνημιτόνων**

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις:

- $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}A$
- $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\,\text{συν}B$
- $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\,\text{συν}\Gamma$

οι οποίες εκφράζουν το νόμο συνημιτόνων σε ένα τρίγωνο.




## Λίγα λόγια για την εξεταστέα ύλη και τα θέματα

Όπως είναι γνωστό, τα θέματα στις εξετάσεις του Γυμνασίου χωρίζονται σε δύο κατηγορίες.

**Τη Θεωρία και τις Ασκήσεις.**

Έχουμε **2 θέματα Θεωρίας** και **3 Ασκήσεις**.

Πρέπει να απαντήσουμε σε **1 θέμα Θεωρίας** και να λύσουμε **2 Ασκήσεις**.

- Δεν πρέπει να ανακατεύουμε ερωτήματα από τα διάφορα θέματα.
- **Θέματα Θεωρίας θεωρούνται αυτά που είναι με σαφήνεια διατυπωμένα μέσα στο Σχολικό βιβλίο.**
- Συνήθως οι καθηγητές βάσει νόμου **«χαρίζουν»** ένα τμήμα της ύλης.

## SOS ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 1ο

- **Ορισμοί αριθμητικών, αλγεβρικών, ακέραιων παραστάσεων. Επίσης, η έννοια του μονωνύμου, τα χαρακτηριστικά του, ο βαθμός του, πότε δύο μονώνυμα είναι ίσα, πότε αντίθετα, πότε όμοια, πότε ένα μονώνυμο είναι μηδενικό και ποιο μονώνυμο είναι μηδενικού βαθμού (σταθερά)..**

**Ταυτότητες.**

Μια παράγραφος που δίνει θέμα θεωρίας με απίθανα μεγάλη συχνότητα.

**Πιθανά θέματα:**

- **Ορισμός ταυτότητας**
- **Αποδείξεις όλων των ταυτοτήτων**

- **Συμπλήρωση ταυτότητας.**
- **Ορισμός παραγοντοποίησης** και **τρόποι παραγοντοποίησης**.
- **Ορισμοί Ε.Κ.Π., Μ.Κ.Δ.**
- Ορισμός ρητής αλγεβρικής παράστασης καθώς και πότε ορίζεται και πώς απλοποιείται

**Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 2 ο**

**Επίλυση εξίσωσης β΄ βαθμού**

**Διάταξη – Ιδιότητες διάταξης**

**Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3 ο**

**Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος**

**Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 4 ο**

**Χαρακτηριστικά της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \alpha x^2$.**

**Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 5 ο**

**Συνήθως αφαιρείται από την ύλη ή δεν διδάσκεται.**

Αν όμως είναι στην ύλη τότε προσοχή στους

- ορισμούς.
- Ορισμός πιθανότητας,

# ΜΕΡΟΣ Β'

## Κεφ. 1ο | ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

- **Κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία** ενός τριγώνου.
- Ορισμός ισότητας τριγώνων, **κριτήρια ισότητας**
- **Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων** τριγώνων
- **Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων – Ιδιότητες αναλογιών .**
- **Ομοιότητα πολυγώνων – τριγώνων**
- **Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων**

# Κεφ. 2ο | ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

- **Ορισμοί τριγωνομετρικών αριθμών ημω, συνω, εφω**
- **Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών**
- **Απόδειξη των** $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ και $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$.
- Νόμοι των ημιτόνων και συνημιτόνων**.**

# SOS ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΦ' ΟΛΗΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ

**Στα θέματα θεωρίας μεγαλύτερες πιθανότητες έχουν κατά σειρά:**

1. **Ταυτότητες.** Συνήθως ζητείται να αποδειχθούν κάποιες από τις ταυτότητες

$$(\alpha+\beta)^2,\ (\alpha+\beta)(\alpha-\beta),\ (\alpha+\beta)^3 \quad \text{κ.τ.λ..}$$

**Όμως είναι ενδεχόμενο να δοθούν ισότητες με κενά και να ζητηθεί να συμπληρωθούν τα κενά.**

2. **Ερωτήσεις που αφορούν την έννοια του μονωνύμου.**
**(Τι είναι μονώνυμο, τι είναι κύριο μέρος, τι είναι συντελεστής, πότε είναι όμοια δύο μονώνυμα κ.λπ.).**

3. **Ορισμός των τριγωνομετρικών αριθμών σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και απόδειξη του βασικού θεωρήματος** $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ **καθώς και σχέσεις τριγωνομετρικών αριθμών παραπληρωματικών γωνιών.**

4. **Κριτήρια ισότητας τριγώνων και ορθογωνίων τριγώνων, κριτήρια ομοιότητας τριγώνων.**

5. Γενικά χαρακτηριστικά της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \alpha x^2$

## SOS ΤΥΠΟΙ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΕΦ' ΟΛΗΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ

**Στα θέματα των ασκήσεων μεγαλύτερες πιθανότητες έχουν κατά σειρά:**

1. **Εξισώσεις β΄ βαθμού ή κλασματικές εξισώσεις.**
2. **Δίνεται ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.**
   **Να γίνουν κάποιες πράξεις ώστε να μορφοποιηθεί και στη συνέχεια να λυθεί.**
3. **Απλοποιήσεις κλασμάτων – Απόδειξη ισοτήτων.**
4. **Ισότητα-Ομοιότητα τριγώνων, Σχέσεις Τριγωνομετρικών Αριθμών.**

# ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

## Κεφ. 1ο -2ο | ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ-ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

**1.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις: $A(x)=4x(x+3)$ και $B(x)=x^2+6x+9$.

**α.** Να λύσετε την εξίσωση $A(x)=0$.

**β.** Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της $B$ για $x=-2$

**γ.** Να κάνετε τις πράξεις και τις αναγωγές της παράστασης $A-B$ και να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $A+B$.

Μονάδες (1+1+4,6)=6,6

### Λύση

**α.** Έχουμε $A(x)=0$ ή $4x(x+3)=0$ ή $\left\{\begin{matrix} 4x=0 \\ ή \\ x+3=0 \end{matrix}\right.$ ή $\left\{\begin{matrix} x=0 \\ ή \\ x=-3 \end{matrix}\right.$

**β.** Βάζοντας όπου $x$ το $-2$ στην παράσταση $B=x^2+6x+9=(x+3)^2$ έχουμε:

$$B=((-2)+3)^2=(-2+3)^2=1^2=1.$$

**γ.** Είναι: $A-B=4x(x+3)-(x^2+6x+9)=4x^2+12x-x^2-6x-9=3x^2+6x-9$

και $A+B=4x(x+3)+(x+3)^2=(x+3)(4x+x+3)=(x+3)(5x+3)$.

**2.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Θεωρούμε την αλγεβρική παράσταση: $A=(1-2x)(-4x+8)-(4x-2)^2$

**α.** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $A$.

**β.** Να λύσετε την εξίσωση: $4(1-2x)(x+1)=0$.

**γ.** Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A$ για $x=\sqrt{2}$

Μονάδες (2+2+2,7)=6,7

### Λύση

**α.** Έχουμε:

$$A=(1-2x)(-4x+8)-(4x-2)^2=-(2x-1)\left[-(4x-8)\right]-\left[2(2x-1)\right]^2=$$

$$=(2x-1)(4x-8)-4(2x-1)^2=(2x-1)\left[(4x-8)-4(2x-1)\right]=(2x-1)(4x-8-8x+4)$$

$$=(2x-1)(-4x-4)=-4(x+1)(2x-1)$$

**β.** Είναι:

$$4(1-2x)(x+1)=0 \quad ή \quad \{1-2x=0 \text{ ή } x+1=0\} \text{ ή}$$

$$\{1=2x \text{ ή } x+1=0\} \quad ή \quad \{2x=1 \text{ ή } x=-1\} \text{ ή } \left\{x=\frac{1}{2} \text{ ή } x=-1\right\}.$$

**γ.** Βάζοντας όπου $x$ το $\sqrt{2}$ στην παράσταση $A=-4(x+1)(2x-1)$ έχουμε:

$$A=-4\left(\sqrt{2}+1\right)\left(2\sqrt{2}-1\right)=-4\left(2\sqrt{2}^2-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-1\right)$$

$$=-4\left(4-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-1\right)=-4\left(\sqrt{2}+3\right)$$

3. **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=(x+1)^2$ και $B=x^2+2x+3$

**α.** Να αποδείξετε ότι: $B=A+2$ και $AB+1=(A+1)^2$

**β.** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $(x+1)^2\left(x^2+2x+3\right)+1$

Μονάδες (3,6+3)=6,6

## Λύση

**α.** Έχουμε:

- $A=(x+1)^2=x^2+2x+1$
- $B=x^2+2x+3$

Είναι:

- $A+2=x^2+2x+1+2=x^2+2x+3=B$
- $AB+1=(x+1)^2\left(x^2+2x+3\right)+1=\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+2x+3\right)+1=$

$$=x^4+2x^3+3x^2+2x^3+4x^2+6x+x^2+2x+3+1=$$

$$=x^4+4x^3+8x^2+8x+4$$

Δηλαδή $\boxed{AB+1=x^4+4x^3+8x^2+8x+4}:(1)$

- $(A+1)^2=\left((x+1)^2+1\right)^2=\left(x^2+2x+1+1\right)^2=\left(x^2+2x+2\right)^2=$

$$=\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)=$$

$$=x^4+2x^3+2x^2+2x^3+4x^2+4x+2x^2+4x+4=$$

$$=x^4+4x^3+8x^2+8x+4$$

Δηλαδή $\boxed{(A+1)^2=x^4+4x^3+8x^2+8x+4}:(2)$.

Από τις σχέσεις $(1)$ και $(2)$ έχουμε: $AB+1=(A+1)^2$.

**β.** Έχουμε $(x+1)^2\left(x^2+2x+3\right)+1=A\cdot B+1\overset{(\alpha)}{=}(A+1)^2=\left(x^2+2x+2\right)^2$.

**4.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Να λυθεί η εξίσωση: $y^2(y-2)+4y(y-2)+4y-8=0$.

Μονάδες 6,7

## Λύση

Έχουμε:

$y^2(y-2)+4y(y-2)+4y-8=0$ ή $y^2(y-2)+4y(y-2)+4(y-2)=0$ ή

$$(y-2)\left(y^2+4y+4\right)=0 \text{ ή}$$

$$\begin{cases} y-2=0 \\ y^2+4y+4=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=2 \\ (y+2)^2=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=2 \\ y=-2 \text{ διπλή ρίζα} \end{cases}$$

**5.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Δίνονται οι παραστάσεις:

$A=1-\dfrac{x-5}{x-2}$, με $\mathbf{x\neq 2}$ και $B=\dfrac{2x^2+x}{x-3}:\dfrac{x^2+3x}{x^2-9}$, με $x\neq 0$, $x\neq -3$ και $x\neq 3$.

**α.** Να αποδείξετε ότι: $A=\dfrac{3}{x-2}$

**β.** Να αποδείξετε ότι: $B=2x+1$

**γ.** Να βρείτε τις τιμές του $x$ ώστε να ισχύει: $A=B$

Μονάδες (1,5+2,5+2,7)=6,7

## Λύση

**α.** Για κάθε $x \neq 2$ έχουμε:

$$A = 1 - \frac{x-5}{x-2} = \frac{x-2-(x-5)}{x-2} = \frac{x-2-x+5}{x-2} = \frac{3}{x-2},\quad x \neq 2.$$

**β.** Για κάθε $x \neq 0$, $x \neq -3$ και $x \neq 3$ έχουμε:

$$B = \frac{2x^2+x}{x-3} : \frac{x^2+3x}{x^2-9} = \frac{x(2x+1)}{x-3} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{x(x+3)} =$$

$$= \frac{\cancel{x}(2x+1)\cancel{(x-3)}\cancel{(x+3)}}{\cancel{x}\cancel{(x-3)}\cancel{(x+3)}} = 2x+1.$$

**γ.** Για κάθε $x \neq -3$, $x \neq 0$, $x \neq 2$ και $x \neq 3$ έχουμε:

$$A = B \quad ή \quad \frac{3}{x-2} = 2x+1 \quad ή \quad 3 = (x-2)(2x+1) \quad ή \quad 2x^2 + x - 4x - 2 - 3 = 0 \quad ή$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

Η τελευταία είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2(-5) = 9 + 40 = 49$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 7}{4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{3+7}{4} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2} \\ x_2 = \dfrac{3-7}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

Οι ρίζες είναι και οι δύο δεκτές αφού πληρούν τους περιορισμούς.

**6.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{x}{x+3} - \frac{2}{x-3} + \frac{12}{x^2-9} \quad και \quad B = x^2 - 5x + 6$$

**α.** Να βρείτε τις τιμές του $x$ για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $A$.

**β.** Να αποδειχθεί ότι: $A = \dfrac{x^2-5x+6}{(x+3)(x-3)}$

**γ.** Να βρείτε για ποιες τιμές του $x$ ισχύει: $B = 0$.

**δ.** Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{x}{x+3} - \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{12}{x^2-9} = 0$

Μονάδες $(2+1,7+1+2)=6,7$

## Λύση

**α.** Η παράσταση $A=\frac{x}{x+3}-\frac{2}{x-3}+\frac{12}{x^2-9}$ ορίζεται, αν η μεταβλητή **x** παίρνει τιμές που δε μηδενίζουν τον παρονομαστή, δηλαδή:

- για το κλάσμα $\frac{x}{x+3}$ πρέπει $x+3\neq 0$ ή $x\neq -3$
- για το κλάσμα $\frac{2}{x-3}$ πρέπει $x-3\neq 0$ ή $x\neq 3$
- για το κλάσμα $\frac{12}{x^2-9}$ πρέπει:

$x^2-9\neq 0$ ή $(x-3)(x+3)\neq 0$ ή $\{x-3\neq 0$ και $x+3\neq 0\}$ ή $\{x\neq 3$ και $x\neq -3\}$

Δηλαδή η παράσταση $A=\frac{x}{x+3}-\frac{2}{x-3}+\frac{12}{x^2-9}$ ορίζεται για κάθε $x\neq 3$ και $x\neq -3$.

**β.** Το ΕΚΠ των παρονομαστών είναι $(x-3)(x+3)$. Έτσι έχουμε:

$$A=\frac{\overset{x-3}{\smile}\!x}{x+3}-\frac{\overset{x+3}{\smile}\!2}{x-3}+\frac{\overset{1}{\smile}\!12}{(x-3)(x+3)}=\frac{x(x-3)-2(x+3)+12}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\frac{x^2-3x-2x-6+12}{(x-3)(x+3)}=\frac{x^2-5x+6}{(x-3)(x+3)} \text{ για κάθε } x\neq 3 \text{ και } x\neq -3$$

**γ.** Η εξίσωση $B=0$ ή $x^2-5x+6=0$ είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1>0$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{5+1}{2}=3 \\ x_2=\frac{5-1}{2}=2 \end{cases}$$

**δ.** Στο ερώτημα **β** αποδείξαμε ότι για κάθε $x\neq 3$ και $x\neq -3$ η παράσταση

$A=\frac{x}{x+3}-\frac{2}{x-3}+\frac{12}{x^2-9}$ γράφεται μετά από πράξεις: $A=\frac{x^2-5x+6}{(x+3)(x-3)}$

έτσι η εξίσωση για κάθε $x\neq 3$ και $x\neq -3$:

$$\frac{x}{x+3}-\frac{2}{x-3}+\frac{12}{x^2-9}=0 \text{ γίνεται } \frac{x^2-5x+6}{(x+3)(x-3)}=0 \text{ ή}$$

ή $\begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{(x-3)(x+3)}=0 \\ \text{με } x\neq 3, x\neq -3 \end{cases}$ ή

**Σχόλιο:**

Ένα κλάσμα είναι ίσο με μηδέν μόνο όταν ο αριθμητής του είναι ίσος με μηδέν και ο ή $\begin{cases} x^2-5x+6=0 \\ \text{με } x\neq 3, x\neq -3 \end{cases}$ ή

ή $\begin{cases} x=2 \text{ ή } x=3 \text{ (απο ερωτ.γ)} \\ \text{με } x\neq 3, x\neq -3 \end{cases}$ ή

ή $\{x=2$

Άρα η εξίσωση έχει λύση την $x=2$.

παρονομαστής του είναι διάφορος του μηδενός, δηλαδή από την εξίσωση $\frac{x^2-5x+6}{(x-3)(x+3)}=0$ προκύπτει ότι $x^2-5x+6=0$ για κάθε $x\neq 3$ και $x\neq -3$.

**7.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Δίνεται η παράσταση: $A=\frac{x^2-4x+4}{2x^2-10x+12}$.

**α.** Να εκτελέσετε τις αναγκαίες παραγοντοποιήσεις και να αποδείξετε ότι: $A=\frac{x-2}{2(x-3)}$

**β.** Να απλοποιήσετε την παράσταση: $B=\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}$

**γ.** Να λύσετε την εξίσωση: $A\cdot B-\frac{5}{2(x-3)^2}=\frac{2}{x-3}$

Μονάδες (2+2+2,7)=6,7

## Λύση

**α.** Η παράσταση $A=\frac{x^2-4x+4}{2x^2-10x+12}$ ορίζεται, αν η μεταβλητή x παίρνει τιμές που δε μηδενίζουν τον παρονομαστή, δηλαδή: $2x^2-10x+12\neq 0$ ή $2(x^2-5x+6)\neq 0$

Λύνουμε την εξίσωση

$2(x^2-5x+6)=0$ ή $x^2-5x+6=0$

**Σχόλιο:**
Λύνουμε την εξίσωση και απορρίπτουμε τις ρίζες της.

Είναι $\alpha=1, \beta=-5$, $\gamma=6$, οπότε η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1>0$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{5+1}{2}=3 \\ x_2=\frac{5-1}{2}=2 \end{cases}$$

**Παραγοντοποίηση τριωνύμου:**
Αν $\rho_1$, $\rho_2$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο
$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$

Δηλαδή η παράσταση $A=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-10x+12}$ ορίζεται για κάθε $x\neq 2$ και $x\neq 3$.

Αφού η εξίσωση $x^2-5x+6=0$ έχει ρίζες τις $x=2$ και $x=3$, το τριώνυμο $x^2+5x+6$ παραγοντοποιείται ως έξης: $x^2-5x+6=1\cdot(x-2)(x-3)=(x-2)(x-3)$.

Έτσι έχουμε: $A=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-10x+12}=\dfrac{x^2-2x\cdot 2+2^2}{2(x^2-5x+6)}=$

$$=\frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{2\cancel{(x-2)}(x-3)}=\frac{x-2}{2(x-3)} \text{ για κάθε } x\neq 2 \text{ και } x\neq 3.$$

**β.**

- Η παράσταση $B=\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}$ ορίζεται, αν η μεταβλητή x παίρνει τιμές που δε μηδενίζουν τον παρονομαστή, δηλαδή:

$x^2-9\neq 0$ ή $(x-3)(x+3)\neq 0$ ή $\{x-3\neq 0$ και $x+3\neq 0\}$ ή $\{x\neq 3$ και $x\neq -3\}$

Δηλαδή η παράσταση $B=\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}$ ορίζεται για κάθε $x\neq 3$ και $x\neq -3$.

- Για το τριώνυμο $x^2+5x+6$ έχουμε:

Η εξίσωση $x^2+5x+6=0$ είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=5^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1>0$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{-5\pm 1}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-5+1}{2}=-2 \\ x_2=\dfrac{-5-1}{2}=-3 \end{cases}$$

οπότε το τριώνυμο $x^2+5x+6$ παραγοντοποιείται ως έξης:

$$x^2+5x+6=1\cdot\left(x-(-2))(x-(-3)\right)=(x+2)(x+3)$$

- Ακόμη $x^2-9=(x-3)(x-3)$.

Έτσι η παράσταση B γίνεται:

$$B=\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}=\frac{(x+2)\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(x-3)}=\frac{x+2}{x-3} \text{ για κάθε } x\neq 3 \text{ και } x\neq -3.$$

**γ.** Έχουμε:

- $A=\dfrac{x-2}{2(x-3)}$ για κάθε $x\neq 2$ και $x\neq 3$.
- $B=\dfrac{x+2}{x-3}$ για κάθε $x\neq 3$ και $x\neq -3$.

Έτσι η εξίσωση $A\cdot B-\dfrac{5}{2(x-3)^2}=\dfrac{2}{x-3}$ για κάθε $x\neq 2, x\neq 3$ και $x\neq -3$ γίνεται:

$$\frac{x-2}{2(x-3)}\cdot\frac{x+2}{x-3}-\frac{5}{2(x-3)^2}=\frac{2}{x-3} \text{ ή } \frac{(x-2)(x+2)}{2(x-3)^2}-\frac{5}{2(x-3)^2}=\frac{2}{x-3} \text{ ή }$$

$$\frac{(x-2)(x+2)-5}{2(x-3)^2}=\frac{2}{x-3} \text{ ή } (x-2)(x+2)-5=4(x-3) \text{ ή }$$

$$x^2-4-5-4x+12=0 \quad \text{ή} \quad x^2-4x+3=0$$

Η εξίσωση $x^2-4x+3=0$ είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=16-12=4>0$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{4+2}{2}=3 \\ x_2=\dfrac{4-2}{2}=1 \end{cases}$$

Η $x=3$ απορρίπτεται γιατί δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς. Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=1$.

8. **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Να λυθεί η κλασματική εξίσωση: $\dfrac{4}{x^2+2x-3}-\dfrac{x+1}{2-2x}=\dfrac{x+2}{x+3}$

Μονάδες 6,7

## Λύση

Για να ορίζονται τα κλάσματα της εξίσωσης πρέπει:

- για το κλάσμα $\dfrac{x+2}{x+3}$, να ισχύει $x+3\neq 0$ ή $\boxed{x\neq -3}$
- για το κλάσμα $\dfrac{x+1}{2-2x}$, να ισχύει $2-2x\neq 0$ ή $2\neq 2x$ ή $\boxed{x\neq 1}$
- για το κλάσμα $\dfrac{4}{x^2+2x-3}$, να ισχύει $x^2+2x-3\neq 0$

Η εξίσωση $x^2+2x-3=0$ είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-3)=4+12=16>0$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm4}{2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{-2+4}{2}=1\\[2mm] x_2=\dfrac{-2-4}{2}=-3\end{cases}$$

Επομένως το κλάσμα $\dfrac{4}{x^2+2x-3}$ ορίζεται για $\boxed{x\neq-3,\ x\neq1}$

Έτσι η εξίσωση $\dfrac{4}{x^2+2x-3}-\dfrac{x+1}{2-2x}=\dfrac{x+2}{x+3}$ ορίζεται για κάθε $x\neq-3,\ x\neq1$

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών

- $x+3$
- $2(x-1)$
- $(x+3)(x-1)$

της εξίσωσης είναι Ε.Κ.Π. $=2(x-1)(x+3)$ και η εξίσωση

$$\frac{4}{(x+3)(x-1)}+\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{x+2}{x+3}\ \text{για κάθε } x\neq-3,\ x\neq1 \text{ γράφεται:}$$

$$2\cancel{(x-1)}\cancel{(x+3)}\frac{4}{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-1)}}+2\cancel{(x-1)}(x+3)\frac{x+1}{2\cancel{(x-1)}}=2(x-1)\cancel{(x+3)}\frac{x+2}{\cancel{x+3}}\ \text{ή}$$

$$8+(x+3)(x+1)=2(x-1)(x+2)\quad\text{ή}\quad 8+x^2+x+3x+3=2x^2+4x-2x-4\ \text{ή}$$

$$x^2+4x+11=2x^2+2x-4\quad\text{ή}\quad 2x^2-x^2+2x-4x-4-11=0\quad\text{ή}\quad x^2-2x-15=0$$

Η εξίσωση $x^2-2x-15=0$ είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-2)^2-4\cdot1(-15)=4+60=64>0$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{64}}{2\cdot1}=\frac{2\pm8}{2}\begin{cases}x_1=\dfrac{2-8}{2}=-3\\[2mm] x_2=\dfrac{2+8}{2}=5\end{cases}$$

Η $x=-3$ δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς και απορρίπτεται. Επομένως η αρχική εξίσωση έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x=5$.

**9.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

**α.** Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}=3$

**β.** Αν οι λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος (α) είναι και λύσεις της εξίσωσης $x^3+x^2-\kappa x+\lambda=0$ να βρεθούν τα $\kappa,\lambda$.

Μονάδες (3+3,6)=6,6

## Λύση

**α.** Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης $\frac{x+2}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=3$ πρέπει:

- για το κλάσμα $\frac{x+2}{x-1}$, να ισχύει $x-1\neq 0$ ή $\boxed{x\neq 1}$
- για το κλάσμα $\frac{x-1}{x+1}$, να ισχύει $x+1\neq 0$ ή $\boxed{x\neq -1}$

Έτσι η εξίσωση $\frac{x+2}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=3$ ορίζεται για κάθε $x\neq -1, x\neq 1$

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών

- $x+1$
- $x-1$

της εξίσωσης είναι $\text{Ε.Κ.Π.}=(x-1)(x+1)$ και η εξίσωση

$$\frac{x+2}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=3 \text{ για κάθε } x\neq -1, x\neq 1 \text{ γράφεται:}$$

$$(\cancel{x-1})(x+1)\frac{x+2}{\cancel{x-1}}+(x-1)(\cancel{x+1})\frac{x-1}{\cancel{x+1}}=3(x-1)(x+1)$$

$$(x+1)(x+2)+(x-1)^2=3(x-1)(x+1) \text{ ή}$$

$$x^2+\cancel{2x}+x+2+x^2-\cancel{2x}+1=3(x^2-1) \text{ ή}$$

$$2x^2+x+3=3x^2-3 \quad \text{ή} \quad 0=3x^2-3-2x^2-x-3 \quad \text{ή} \quad x^2-x-6=0$$

Η εξίσωση $x^2-x-6=0$ είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1(-6)=1+24=25>0$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{1+5}{2}=3, \\ x_2=\frac{1-5}{2}=-2, \end{cases}$$

οι οποίες είναι δεκτές αφού ικανοποιούν τους περιορισμούς.

**β.** Επειδή οι αριθμοί $3,-2$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος (α) και είναι και λύσεις της εξίσωσης $x^3+x^2-\kappa x+\lambda=0$ έχουμε:

$$\begin{cases} 3^3+3^2-\kappa\cdot 3+\lambda=0 \\ (-2)^3+(-2)^2-\kappa(-2)+\lambda=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 27+9-3\kappa+\lambda=0 \\ -8+4+2\kappa+\lambda=0 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} -3\kappa+\lambda=-36 \\ 2\kappa+\lambda=4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3\kappa-\lambda=36 \\ 2\kappa+\lambda=4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 5\kappa=40 \\ 2\kappa+\lambda=4 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases}\kappa=8\\2\kappa+\lambda=4\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}\kappa=8\\2\cdot 8+\lambda=4\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}\kappa=8\\\lambda=4-16\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}\kappa=8\\\lambda=-12\end{cases}$$

10. **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=x^2-2x$, $B=x^2-5x+6$, $\Gamma=x^2-5x$, $\Delta=x^2-25$

**α.** Να λύσετε την εξίσωση $x^2-5x+6=0$.

**β.** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις: Α, Β, Γ και Δ.

**γ.** Να απλοποιηθούν οι ρητές αλγεβρικές παραστάσεις: $\frac{A}{B}$ και $\frac{\Delta}{\Gamma}$

**δ.** Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x}{x-3}+\frac{x}{x+5}=0$

Μονάδες (2+2+1+1,6)=6,6

## Λύση

**α.** Η εξίσωση $x^2-5x+6=0$ είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1>0$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}x_1=\frac{5+1}{2}=3\\x_2=\frac{5-1}{2}=2\end{cases}$$

**β.** Έχουμε:

- $A=x^2-2x=x(x-2)$
- $B=x^2-5x+6=1\cdot(x-2)(x-3)$

  αφού έχει ρίζες τους αριθμούς 2,3
- $\Gamma=x^2-5x=x(x-5)$ και
- $\Delta=x^2-5^2=(x-5)(x+5)$

**Παραγοντοποίηση τριωνύμου:**

Αν $\rho_1$, $\rho_2$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$$

**γ.**

❖ Η παράσταση $\frac{A}{B}=\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6}$ ορίζεται, αν η μεταβλητή x παίρνει τιμές που δε μηδενίζουν τον παρονομαστή, δηλαδή αν: $B\neq 0$ ή $x^2-5x+6\neq 0$

Λύνουμε την εξίσωση

$x^2-5x+6=0$

**Σχόλιο:**

Λύνουμε την εξίσωση και απορρίπτουμε τις ρίζες της.

Όμως από το ερώτημα (α) οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-5x+6=0$ είναι οι αριθμοί $x=2$ και $x=3$.

Έτσι η παράσταση $\frac{A}{B}=\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6}$ ορίζεται για κάθε $x\neq 2$ και $x\neq 3$. Έχουμε:

$$\frac{A}{B}=\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6}=\frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=\frac{x}{x-3}$$ για κάθε $x\neq 2$ και $x\neq 3$.

❖ Η παράσταση $\frac{\Delta}{\Gamma}=\frac{x^2-25}{x^2-5x}$ ορίζεται, αν η μεταβλητή x παίρνει τιμές που δε μηδενίζουν τον παρονομαστή, δηλαδή αν: $\Delta\neq 0$ ή $x^2-5x\neq 0$

**1ος Τρόπος:**

Λύνουμε την εξίσωση:

$$x^2-5x=0 \text{ ή } x(x-5)=0 \text{ ή}$$
$$\{x=0 \text{ ή } x-5=0\} \text{ ή } \{x=0 \text{ ή } x=5\}$$

**Σχόλιο:**

Λύνουμε την εξίσωση και απορρίπτουμε τις ρίζες της.

Δηλαδή η παράσταση $\frac{\Delta}{\Gamma}=\frac{x^2-25}{x^2-5x}$ ορίζεται για κάθε $x\neq 5$ και $x\neq 0$.

**2ος Τρόπος:**

**Εναλλακτικά:**

$$\Delta\neq 0 \text{ ή } x^2-5x\neq 0 \text{ ή } x(x-5)\neq 0 \text{ ή } \{x\neq 0 \text{ και } x-5\neq 0\} \text{ ή } \{x\neq 0 \text{ και } x\neq 5\}$$

Δηλαδή η παράσταση $\frac{\Delta}{\Gamma}=\frac{x^2-25}{x^2-5x}$ ορίζεται για κάθε $x\neq 5$ και $x\neq 0$.

Έχουμε: $$\frac{\Delta}{\Gamma}=\frac{x^2-25}{x^2-5x}=\frac{\cancel{(x-5)}(x+5)}{x\cancel{(x-5)}}=\frac{x+5}{x}$$ με $x\neq 5$ και $x\neq 0$.

**δ.** Πρέπει $x\neq 3$ και $x\neq -5$. Έχουμε:

$$\frac{x}{x-3}+\frac{x}{x+5}=0 \quad \text{ή} \quad (x-3)(x+5)\frac{x}{x-3}+(x-3)(x+5)\frac{x}{x+5}=0 \text{ ή}$$

$$(x+5)x+(x-3)x=0 \quad \text{ή} \quad (x+5+x-3)x=0 \text{ ή} \quad (2x+2)x=0 \text{ ή}$$

$$(2x+2=0 \text{ ή } x=0) \quad \text{ή} \quad (2x=-2 \text{ ή } x=0) \quad \text{ή} \quad (x=-1 \text{ ή } x=0)$$

οι οποίες ικανοποιούν τους περιορισμούς και είναι άρα είναι δεκτές.

Επομένως η εξίσωση $\frac{x}{x-3}+\frac{x}{x+5}=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x=0$ και $x=-1$.

**11.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 4x-3(2x+3y)=20-x+y \\ 2(x-2y)+5(x-2)=3y+4 \end{cases}$

Μονάδες 6,6

## Λύση

Κάνουμε τις πράξεις:

$$\begin{cases} 4x-3(2x+3y)=20-x+y \\ 2(x-2y)+5(x-2)=3y+4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 4x-6x-9y+x-y=20 \\ 2x-4y+5x-3y=4+10 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} -x-10y=20 \\ 7x-7y=14 \end{cases}$$

διαιρώντας την δεύτερη εξίσωση με το 7 έχουμε $\begin{cases} -x-10y=20 \\ x-y=2 \end{cases}$

προσθέτοντας την δεύτερη εξίσωση στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$\begin{cases} -11y=22 \\ x-y=2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-\dfrac{22}{11} \\ x-y=2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-2 \\ x-(-2)=2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-2 \\ x+2=2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-2 \\ x=2-2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-2 \\ x=0 \end{cases}$$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(0,-2)$.

**12.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Να βρεθεί η λύση $(x,y)$ του συστήματος: $\begin{cases} 3(x+4)-3y=7(x-y) \\ \dfrac{x+3}{2}-3=\dfrac{x-y}{3} \end{cases}$

Μονάδες 6,6

## Λύση

Θα το λύσουμε με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. Είναι:

$$\begin{cases} 3(x+4)-3y=7(x-y) \\ \dfrac{x+3}{2}-3=\dfrac{x-y}{3} \end{cases}$$

πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη εξίσωση με το 6 έχουμε

$$\begin{cases} 3x+12-3y=7x-7y \\ \overset{3}{\cancel{6}}\dfrac{x+3}{\underset{1}{\cancel{2}}}-3\cdot 6=\overset{2}{\cancel{6}}\dfrac{x-y}{\underset{1}{\cancel{3}}} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3x+12-3y=7x-7y \\ 3(x+3)-3\cdot 6=2(x-y) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3x-3y-7x+7y=-12 \\ 3x+9-18=2x-2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x+4y=-12 \\ 3x-2x+2y=18-9 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x-y=3 \\ x+2y=9 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} -x+y=-3 \\ x+2y=9 \end{cases}$$

προσθέτοντας την πρώτη στην δεύτερη εξίσωση έχουμε

$$\begin{cases} -x+y=-3 \\ 3y=6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} -x+y=-3 \\ y=2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} -x+2=-3 \\ y=2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} -x=-3-2 \\ y=2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}.$$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(5,2)$

**13.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Τα παρακάτω συστήματα έχουν κοινή λύση.

$$\begin{cases} \mathbf{2x-y=4} \\ \mathbf{3y+4x=-2} \end{cases} :(\mathbf{1}) \text{ και } \begin{cases} \mathbf{3\alpha x+\beta y=-10} \\ \mathbf{-7\alpha x-2\beta y=10} \end{cases} :(\mathbf{2})$$

**α.** Να λυθεί το σύστημα $(\mathbf{1})$

**β.** Να βρεθούν τα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ του συστήματος $(\mathbf{2})$

Μονάδες (3+3,7)=6,7

## Λύση

**α.** Λύνουμε αρχικά το σύστημα: $\begin{cases} 2x-y=4 \\ 4x+3y=-2 \end{cases}$

πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με το $-2$ έχουμε $\begin{cases} -4x+2y=-8 \\ 4x+3y=-2 \end{cases}$

προσθέτοντας την δεύτερη εξίσωση στην πρώτη έχουμε

$$\begin{cases} 5y=-10 \\ 4x+3y=-2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-2 \\ 4x+3(-2)=-2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-2 \\ 4x=-2+6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-2 \\ 4x=4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(1,-2)$.

**β.** Επειδή τα δύο συστήματα έχουν κοινή λύση, η λύση του πρώτου συστήματος θα είναι και λύση του δευτέρου $\begin{cases} 3\alpha x+\beta y=-10 \\ -7\alpha x-2\beta y=10 \end{cases}$, δηλαδή το επαληθεύει, οπότε:

$$\begin{cases} 3\alpha\cdot 1+\beta(-2)=-10 \\ -7\alpha\cdot 1-2\beta(-2)=10 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3\alpha-2\beta=-10 \\ -7\alpha+4\beta=10 \end{cases}$$

πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με το $2$ έχουμε $\begin{cases} 6\alpha-4\beta=-20 \\ -7\alpha+4\beta=10 \end{cases}$

προσθέτοντας την δεύτερη εξίσωση στην πρώτη έχουμε

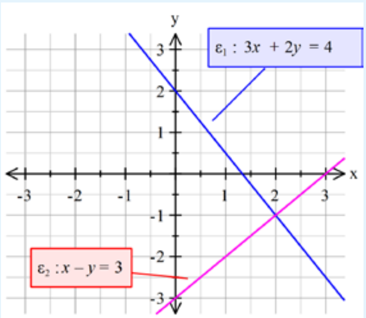
$$\begin{cases} -\alpha=-10 \\ -7\alpha+4\beta=10 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha=10 \\ -7\cdot 10+4\beta=10 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha=10 \\ 4\beta=10+70 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha=10 \\ 4\beta=80 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha=10 \\ \beta=20 \end{cases}$$

Άρα $(\alpha,\beta)=(10,20)$.

**14.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Στο διπλανό σχήμα παριστάνονται στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων οι ευθείες με εξισώσεις: $\boldsymbol{\varepsilon_1 : 3x+2y=4}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_2 : x-y=3}$

**Α.** Χρησιμοποιώντας το σχήμα να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις συμπληρώνοντας τα κενά και μεταφέροντάς τις στην κόλλα σας.




**1.** Η ευθεία $\boldsymbol{\varepsilon_1 : 3x+2y=4}$ τέμνει τον άξονα $\boldsymbol{y'y}$ στο σημείο …………

**2.** Η ευθεία $\boldsymbol{\varepsilon_2 : x-y=3}$ τέμνει τον άξονα $\boldsymbol{x'x}$ στο σημείο ……………..

**3.** Το γραμμικό σύστημα: $\begin{cases} \mathbf{3x+2y=4} \\ \mathbf{x-y=3} \end{cases}$ έχει μοναδική λύση την…………

**Β.** Να λύσετε αλγεβρικά με όποια μέθοδο θέλετε το σύστημα $\begin{cases} \mathbf{3x+2y=4} \\ \mathbf{x-y=3} \end{cases}$

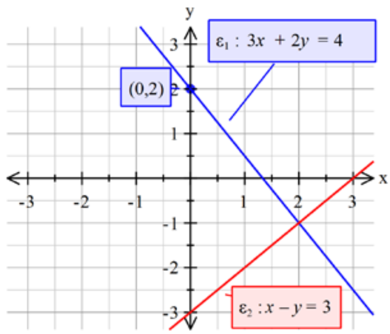
και να επαληθεύσετε τη λύση του από το σχήμα.

Μονάδες (3+3,6)=6,7

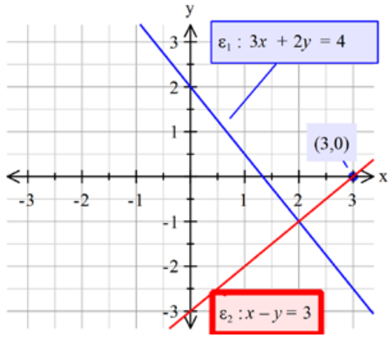
## Λύση

**Α.**

**1.** Η ευθεία $\varepsilon_1 : 3x + 2y = 4$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 2)$ όπως φαίνεται από το διάγραμμα.

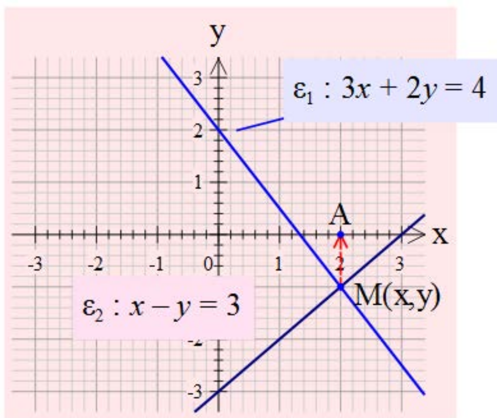



**2.** Η ευθεία $\varepsilon_2 : x - y = 3$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(3, 0)$ όπως φαίνεται από το διάγραμμα.

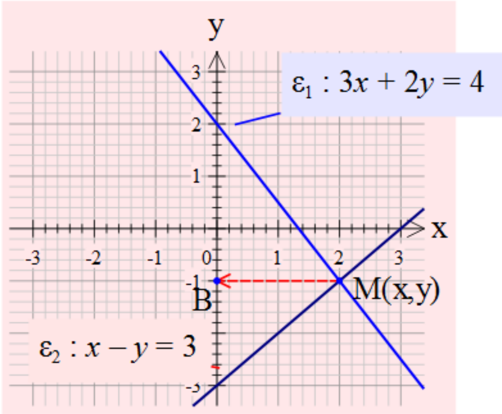



**3.** Μοναδική λύση το ζεύγος $(x, y) = (2, -1)$ που τη βρίσκουμε από το διάγραμμα, με τις εξής προβολές.

- Στον άξονα $x'x$ :
  η προβολή του σημείου $M$ στον άξονα $x'x$ είναι το σημείο $A$ το οποίο έχει τετμημένη $x = 2$.



- Στον άξονα $y'y$:
  η προβολή του σημείου $M$ στον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $B$ το οποίο έχει τεταγμένη $y=-1$.




**Β.** Θα το λύσουμε με μέθοδο αντικατάστασης, δηλαδή θα λύσουμε τη μία εξίσωση ως προς $y$ και θα αντικαταστήσουμε στην άλλη. Είναι:

$$\begin{cases} 3x+2y=4 \\ x-y=3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3x+2y=4 \\ x=y+3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3(y+3)+2y=4 \\ x=y+3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3y+9+2y=4 \\ x=y+3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-1 \\ x=-1+3 \end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Επομένως μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x,y)=(2,-1)$.

**15.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

**α.** Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} \mathbf{3x-2y=4} \\ \mathbf{x+y=3} \end{cases}$

**β.** Αν οι ευθείες $\boldsymbol{\varepsilon_1 : 3x-2y=4}$, $\boldsymbol{\varepsilon_2 : x+y=3}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_3 : 2x+\kappa y=7}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, να βρείτε το $\boldsymbol{\kappa}$.

Μονάδες 6,6

## Λύση

**α.** Θα το λύσουμε με μέθοδο αντικατάστασης, δηλαδή θα λύσουμε τη μία εξίσωση ως προς $\mathbf{y}$ και θα αντικαταστήσουμε στην άλλη.

$$\begin{cases} 3x-2y=4 \\ x+y=3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3x-2y=4 \\ y=3-x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3x-2(3-x)=4 \\ y=3-x \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} 3x-6+2x=4 \\ y=3-x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 5x=10 \\ y=3-x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=2 \\ y=3-2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(2,1)$.

**β.** Η λύση των εξισώσεων των $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ πρέπει να επαληθεύει και την $\varepsilon_3$ και επειδή η λύση του συστήματος $\begin{cases}3x-2y=4\\ x+y=3\end{cases}$ είναι $(x,y)=(2,1)$ από το ερώτημα (α), αυτές οι τιμές πρέπει να επαληθεύουν και την εξίσωση της $\varepsilon_3$. Έτσι:

$$2\cdot 2+\kappa\cdot 1=7 \text{ ή } \kappa=7-4 \text{ ή } \kappa=3.$$

**16.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases}\dfrac{x+y}{8}-\dfrac{x-y}{2}=2\\ (x+1)^2+(y-2)^2=x(x-2)-y(3-y)-5\end{cases}$

**α.** Να αποδείξετε ότι το παραπάνω σύστημα, μετά από πράξεις, παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases}-3x+5y=16\\ 4x-y=-10\end{cases}$$

**β.** Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases}-3x+5y=16\\ 4x-y=-10\end{cases}$

Μονάδες (3,7+3)=6,7

## Λύση

**α.** Κάνουμε τις πράξεις: $\begin{cases}\dfrac{x+y}{8}-\dfrac{x-y}{2}=2\\ (x+1)^2+(y-2)^2=x(x-2)-y(3-y)-5\end{cases}$

πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με το 8 έχουμε

$$\begin{cases}\cancel{8}\dfrac{x+y}{\cancel{8}}-\cancel{8}\dfrac{x-y}{\cancel{2}}=2\cdot 8\\ x^2+2x+1+y^2-4y+4=x^2-2x-3y+y^2-5\end{cases} \quad \text{ή}$$

$$\begin{cases}x+y-4(x-y)=16\\ \cancel{x^2}+2x+\cancel{y^2}-4y-\cancel{x^2}+2x+3y-\cancel{y^2}=-5-1-4\end{cases} \quad \text{ή}$$

$$\begin{cases}x+y-4x+4y=16\\ 2x-4y+2x+3y=-10\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}-3x+5y=16\\ 4x-y=-10\end{cases}$$

**β.** Έτσι: $\begin{cases}-3x+5y=16\\ 4x-y=-10\end{cases}$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη εξίσωση επί 5

$$\begin{cases} -3x+5y=16 \\ 20x-5y=-50 \end{cases}$$

Προσθέτουμε τη δεύτερη στην πρώτη εξίσωση.

$$\begin{cases} -3x+5y=16 \\ 17x=-34 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} -3x+5y=16 \\ x=\dfrac{-34}{17} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} -3\cdot(-2)+5y=16 \\ x=-2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 6+5y=16 \\ x=-2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 5y=10 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases} y=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

Επομένως η μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x,y)=(-2,2)$.

**17.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

**α.** Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \mathbf{(x+1)^2-y=x^2+1} \\ \mathbf{4x-(y-2)^2=-y^2+20} \end{cases}$ και να δειχθεί ότι η λύση του είναι $\mathbf{(x,y)=(2,4)}$.

**β.** Αν η παραπάνω λύση του (α) ερωτήματος είναι και λύση του συστήματος

$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha x+\beta y=22} \\ \boldsymbol{\alpha x-\beta y=-18} \end{cases}$ να βρεθούν οι $\boldsymbol{\alpha,\beta}$.

Μονάδες (3,3+3,3)=6,6

## Λύση

**α.** Κάνουμε τις πράξεις και λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} (x+1)^2-y=x^2+1 \\ 4x-(y-2)^2=-y^2+20 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \cancel{x^2}+2x+1-y-\cancel{x^2}=1 \\ 4x-(y^2-4y+4)+y^2=20 \end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ 4x-\cancel{y^2}+4y-4+\cancel{y^2}=20 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 2x-y=0 \\ 4x+4y-4=20 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=2x \\ 4x+4(2x)=20+4 \end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases} y=2x \\ 4x+8x=24 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=2x \\ 12x=24 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=2x \\ x=2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=4 \\ x=2 \end{cases}$$

Επομένως η μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x,y)=(2,4)$.

**β.** Επειδή οι τιμές που βρήκαμε επαληθεύουν και το δεύτερο σύστημα.

Έτσι βάζοντας όπου $x=2,\ y=4$ στο σύστημα $\begin{cases}\alpha x+\beta y=22\\ \alpha x-\beta y=-18\end{cases}$ έχουμε:

$$\begin{cases}\alpha\cdot 2+\beta\cdot 4=22\\ \alpha\cdot 2-\beta\cdot 4=-18\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}2\alpha+4\beta=22\\ 2\alpha-4\beta=-18\end{cases}$$

προσθέτοντας την πρώτη στην δεύτερη εξίσωση έχουμε:

$$\begin{cases}2\alpha+4\beta=22\\ 4\alpha=4\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}2\alpha+4\beta=22\\ \alpha=1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}2\cdot 1+4\beta=22\\ \alpha=1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}4\beta=20\\ \alpha=1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}\beta=5\\ \alpha=1\end{cases}$$

**18.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

**α.** Να βρεθεί η λύση $(x,y)$ του συστήματος: $\begin{cases}3(3x+2y)-6(y+2)=x+2y\\ 2x-\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{x+5}{2}\end{cases}$

**β.** Να προσδιορίσετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $(x,y)$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα.

Μονάδες (3,3+3,3)=6,6

## Λύση

**α.** Κάνουμε πράξεις:

$$\begin{cases}3(3x+2y)-6(y+2)=x+2y\\ 2x-\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{x+5}{2}\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}9x+6y-6y-12=x+2y\\ 6\cdot 2x-\cancel{6}^{2}\dfrac{x+y}{\cancel{3}_{1}}=\cancel{6}^{3}\dfrac{x+5}{\cancel{2}_{1}}\end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases}9x-12=x+2y\\ 6\cdot 2x-2(x+y)=3(x+5)\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}9x-x-2y=12\\ 6\cdot 2x-2x-2y=3x+15\end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases}8x-2y=12\\ 12x-2x-2y-3x=15\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}8x-2y=12\\ 7x-2y=15\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}-8x+2y=-12\\ 7x-2y=15\end{cases}$$

και με πρόσθεση έχουμε:

$$\begin{cases}-x=3\\ 7x-2y=15\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=-3\\ 7(-3)-2y=15\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=-3\\ -2y=15+21\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=-3\\ -2y=36\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=-3\\ y=-18\end{cases}$$

**β.** Επειδή η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $y=\alpha\cdot x$ και επειδή διέρχεται και από το σημείο $(-3,-18)$, θα ισχύει: $-18=\alpha(-3)$ ή $\alpha=6$

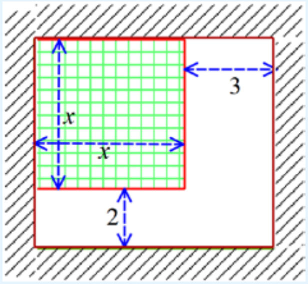
Δηλαδή η ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $(-3,-18)$, είναι η ευθεία με εξίσωση $y=6x$.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

**19.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Ένα τετράγωνο χαλί πλευράς **x** μέτρων τοποθετείται στο δάπεδο ενός δωματίου όπως φαίνεται στο σχήμα, αφήνοντας **2** και **3** μέτρα κατά μήκος των πλευρών του δωματίου.

**α.** Να εκφράσετε το μήκος και το πλάτος του δωματίου συναρτήσει του **x**.




**β.** Αν το συνολικό εμβαδόν του δαπέδου είναι $\mathbf{56m^2}$, να κατασκευάσετε μια εξίσωση ως προς **x** και να τη λύσετε.

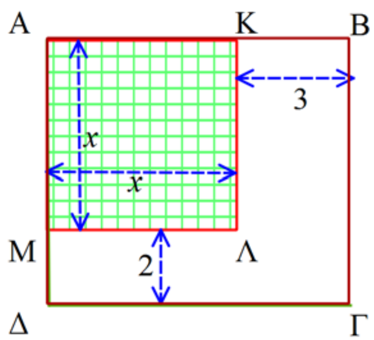
**γ.** Ποιο είναι το μήκος και το πλάτος του δωματίου;

Μονάδες (1+4+1,7)=6,7

## Λύση

**α.** Αν $ΑΒΓΔ$ τα όρια του δωματίου και $ΑΚΛΜ$ τα όρια του χαλιού, τότε $ΚΒ = 3m$ και $ΜΔ = 2m$, συνεπώς:

- το μήκος του δωματίου είναι $ΑΒ = x + 3$ και
- το πλάτος του δωματίου είναι $ΑΔ = x + 2$.




**β.** Το εμβαδόν δωματίου είναι $56m^2$, οπότε:

$$ΑΒ \cdot ΑΔ = 56 \text{ ή } (x+3)(x+2) = 56$$

Δηλαδή έχουμε $x^2 + 2x + 3x + 6 - 56 = 0$ ή $x^2 + 5x - 50 = 0$.

Στην εξίσωση $x^2 + 5x - 50 = 0$ είναι $\alpha = 1$, $\beta = 5$, $\gamma = -50$, οπότε η διακρίνουσά της είναι $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1(-50) = 25 + 200 = 225 > 0$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{225}}{2}=\frac{-5\pm 15}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{-5+15}{2}=\frac{10}{2}=5 \\ x_2=\frac{-5-15}{2}=\frac{-20}{2}=-10 \end{cases}$$

Η $x=-10<0$ απορρίπτεται γιατί $x>0$ ως διάσταση. Οπότε $x=2m$.

**γ.** Το μήκος είναι $5+3=8m$ και το πλάτος είναι $5+2=7m$.

**20.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Οι μαθητές ενός τμήματος της Γ΄ Γυμνασίου, αν καθίσουν ανά ένας σε κάθε διθέσιο θρανίο που υπάρχει μέσα στην τάξη τους, τότε μένουν όρθιοι **8** μαθητές, ενώ αν καθίσουν ανά δυο σε κάθε θρανίο που υπάρχει μέσα στην τάξη τους, τότε μένουν κενά **4** θρανία. Να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος αυτού και πόσα τα θρανία που υπάρχουν στην τάξη τους.

Μονάδες 6,7

## Λύση

Έστω ότι η τάξη έχει: $x$ μαθητές και $y$ διθέσια θρανία, οπότε υπάρχουν $2y$ θέσεις.

Προφανώς $x>y>0$. Όταν οι μαθητές καθίσουν ανά δύο σε κάθε διθέσιο θρανίο, καταλαμβάνουν $x$ θέσεις και περισσεύουν $4$ θρανία, δηλαδή περισσεύουν $8$ θέσεις. Επομένως: $2y=x+8 \quad :(1)$

Όταν οι μαθητές καθίσουν ένας ένας σε κάθε διθέσιο θρανίο τότε μένουν όρθιοι 8 μαθητές οπότε: $y+8=x \quad :(2)$

Έτσι η $(1)$ γίνεται $2y=y+8+8$ ή $y=16$, άρα $x=24$.

Επομένως στην τάξη υπάρχουν $24$ μαθητές και $16$ θρανία.

**21.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Αγόρασε κάποιος πελάτης από έναν παραγωγό **3** κιλά κάστανα και **8** κιλά καρύδια και πλήρωσε **30,50** €. Ένας άλλος πελάτης αγόρασε από τον ίδιο παραγωγό **4** κιλά κάστανα και **4** κιλά καρύδια και πλήρωσε **24** €.

Πόσο κοστίζει το κιλό τα κάστανα και πόσο τα καρύδια;

Μονάδες 6,6

## Λύση

Έστω ότι τα κάστανα κοστίζουν $x$ € το κιλό και τα καρύδια $y$ € το κιλό. Ο πρώτος πελάτης πλήρωσε $3x$ € για κάστανα και $8y$ € για καρύδια. Συνολικά $3x+8y=30,5 \quad :(1)$.

Ο δεύτερος πλήρωσε $4x$ € για κάστανα και $4y$ € για καρύδια και συνολικά $4x+4y=24 \quad :(2)$. Λύνουμε το σύστημα των $(1),(2)$:

$$\begin{cases} 3x+8y=20,5 \\ 4x+4y=24 \end{cases}$$

πολλαπλασιάζοντας την δεύτερη με το $-2$ έχουμε: $\begin{cases} 3x+8y=20,5 \\ -8x-8y=-48 \end{cases}$

προσθέτοντας την πρώτη στην δεύτερη έχουμε: $\begin{cases} -5x=-17,5 \\ -8x-8y=-48 \end{cases}$

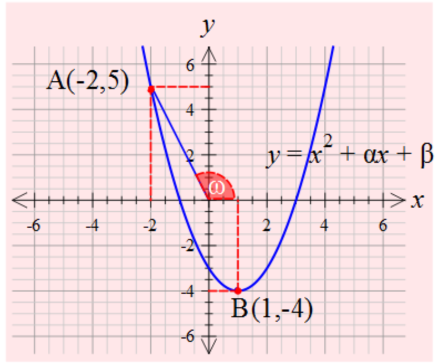
διαιρώντας την δεύτερη με το $-8$ έχουμε:

$$\begin{cases} x=\dfrac{-17,5}{-5}=3,5 \\ x+y=6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=3,5 \\ 3,5+y=6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=3,5 \\ y=2,5 \end{cases}$$

Άρα τα κάστανα κοστίζουν $3,5$€ το κιλό και τα καρύδια $2,5$€ το κιλό.

**22.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Δίνεται η συνάρτηση $y = x^2 + \alpha x + \beta$ με $\boldsymbol{\alpha, \beta}$ πραγματικούς αριθμούς.




**α.** Να βρεθούν οι αριθμοί $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης να διέρχεται από τα σημεία $\mathbf{A(-2,5)}$ και $\mathbf{B(1,-4)}$.

**β.** Για τις τιμές αυτές των $\boldsymbol{\alpha}$ και $\beta$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα,

**i.** Να βρείτε το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα $\mathbf{y'y}$

**ii.** Να βρείτε το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα $\mathbf{x'x}$

**iii.** Να υπολογίσετε το ημίτονο της γωνίας $\mathbf{x\widehat{O}A = \omega}$, όπου $\mathbf{x'x}$ είναι ο οριζόντιος άξονας.

Μονάδες [2,7+(1,3+1,3+1,3)]=6,6

## Λύση

**α.** Επειδή το σημείο $\mathbf{A(-2,5)}$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 + \alpha x + \beta$, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της δηλαδή:

Για $x = -2$ και $y = 5$ στην $y = x^2 + \alpha x + \beta$ έχουμε:

$$5 = (-2)^2 + \alpha(-2) + \beta \quad \text{ή} \quad -2\alpha + \beta = 1 \quad :(1)$$

Όμοια το $\mathbf{B(1,-4)}$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της $y = x^2 + \alpha x + \beta$, άρα:

$$-4 = 1^2 + \alpha + \beta \quad \text{ή} \quad \alpha + \beta = -5 \quad :(2)$$

Λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases}-2\alpha+\beta=1\\ \alpha+\beta=-5\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}-2\alpha+\beta=1\\ -\alpha-\beta=5\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}-3\alpha=6\\ -\alpha-\beta=5\end{cases} \begin{cases}\alpha=-2\\ +2-\beta=5\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=-30\end{cases}$$

Άρα $y=x^2-2x-3$.

**β.** **i.** Για $x=0$, είναι $y=0^2-2\cdot 0-4=-4$

άρα η γραφική παράσταση της $y=x^2-2x-3$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,-4)$.

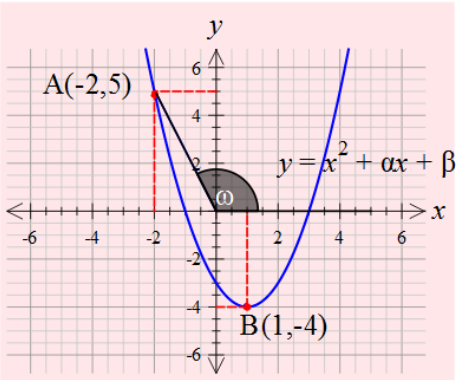
**ii.** Για $y=0$, οπότε: $0=x^2-2x-3$

Στην εξίσωση $x^2-2x-3=0$ είναι $\alpha=1,\ \beta=-2,\ \gamma=-3$, οπότε η διακρίνουσά της είναι $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1(-3)=4+12=16>0$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{+2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{2+4}{2}=\dfrac{6}{2}=3\\ x_2=\dfrac{2-4}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1\end{cases}$$

άρα η γραφική παράσταση της $y=x^2-2x-3$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(-1,0)$, $(3,0)$

**iii.** $\eta\mu\hat{\omega}=\dfrac{y}{\rho}=\dfrac{4}{\sqrt{(-2)^2+4^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{20}}=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ .

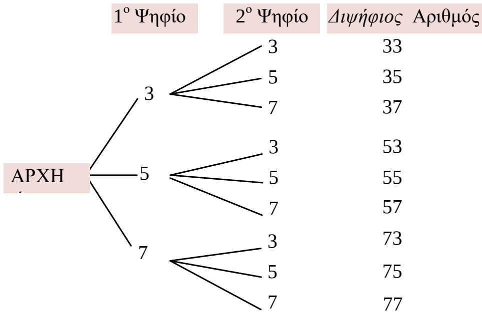


## Κεφ. 5ο | ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

**23.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Επιλέγουμε στην τύχη έναν διψήφιο αριθμό που τα ψηφία του είναι το 3 ή 5 ή 7. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης.

### Λύση




Οπότε έχουμε $\Omega = \{33, 35, 37, 53, 55, 57, 73, 75, 77\}$.

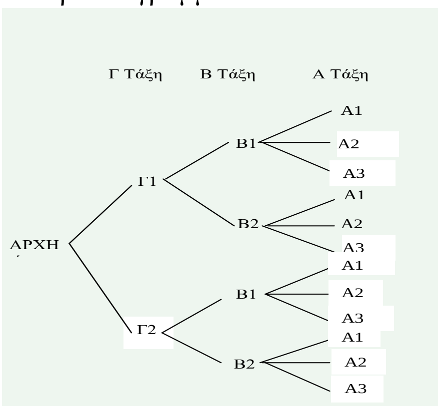
**24.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Μια τριμελής επιτροπή από μαθητές Γυμνασίου αποτελείται από έναν πρόεδρο, ένα γραμματέα και έναν ταμία. Ο πρόεδρος θα επιλεγεί μεταξύ δύο μαθητών της **Γ** Γυμνασίου, ο γραμματέας μεταξύ δύο μαθητών της **Β** Γυμνασίου και ο ταμίας μεταξύ τριών μαθητών της **Α** Γυμνασίου. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

### Λύση

Έστω $\Gamma_1$ , $\Gamma_2$ οι δύο μαθητές της Γ Γυμνασίου, $B_1$ , $B_2$ οι δύο μαθητές της Β Γυμνασίου και $A_1$ , $A_2$ , $A_3$ οι τρεις μαθητές της Α Γυμνασίου.

Τότε έχουμε το παρακάτω δεντρο-διάγραμμα.



Οπότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι ο:

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}\Gamma_1B_1A_1,\Gamma_1B_1A_2,\Gamma_1B_1A_3,\Gamma_1B_2A_1,\\ \Gamma_1B_2A_2,\Gamma_1B_2A_3,\Gamma_2B_1A_1,\Gamma_2B_1A_2,\\ \Gamma_2B_1A_3,\Gamma_2B_2A_1,\Gamma_2B_2A_2,\Gamma_2B_2A_3\end{matrix}\right\}$$

Δηλαδή η επιλογή μπορεί να γίνει με 12 διαφορετικούς τρόπους.

**25.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

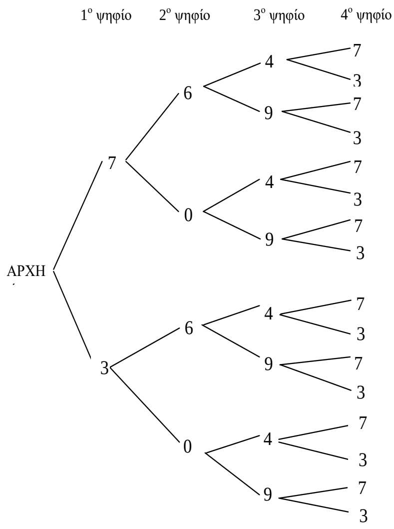
Ο τετραψήφιος αριθμός των πινακίδων ενός αυτοκινήτου που διέφυγαν οι δράστες μιας κλοπής, μετά από κατάθεση μαρτύρων έγινε γνωστό ότι είχε το πρώτο και τέταρτο ψηφίο το **7** ή το **3**, το δεύτερο ψηφίο **6** ή **0** και το τρίτο **4** ή **9**. Ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός της πινακίδας του αυτοκινήτου και να προσδιορίσετε τα ενδεχόμενα:

**Α :** το τρίτο ψηφίο να είναι το **4**

**Β :** το πρώτο ψηφίο να είναι το **3**

## Λύση

Ο αριθμός της πινακίδας του αυτοκινήτου, όπως προκύπτει από το παρακάτω δεντροδιάγραμμα, ανήκει στο σύνολο:




$$\Omega=\left\{\begin{matrix}7647,7643,7697,7693,\\ 7047,7043,7097,7093,\\ 3647,3643,3697,3693,\\ 3047,3043,3097,3093\end{matrix}\right\}$$

Τα ενδεχόμενα $A$ και $B$ είναι τα $A=\left\{\begin{matrix}7647,7643,\\7047,7043,\\3647,3643,\\3047,3043\end{matrix}\right\}$ και $B=\left\{\begin{matrix}3647,3643,3697,3693,\\3047,3043,3097,3093\end{matrix}\right\}$

**26.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

**Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις διαδοχικές φορές.**

Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχόμενων:

$\mathbf{A_1}$ :“Ο αριθμός των **Κ** υπερβαίνει τον αριθμό των **Γ**”

$\mathbf{A_2}$ :“Ο αριθμός των **Κ** είναι ακριβώς **2**”

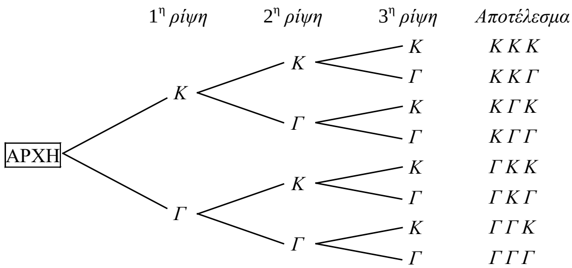
$\mathbf{A_3}$ :“Ο αριθμός των **Κ** είναι τουλάχιστον **2**”

$\mathbf{A_4}$ :“Ίδια όψη και στις τρεις ρίψεις”

$\mathbf{A_5}$ :“Στην πρώτη ρίψη φέρνουμε **Κ**”.

## Λύση

Πρώτα προσδιορίζουμε το δειγματικό χώρο και γι’ αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ένα δεντροδιάγραμμα:




Άρα, ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από διατεταγμένες τριάδες με στοιχεία το Κ και το Γ και είναι όλες ισοπίθανες. Ο δειγματικός χώρος είναι ο:

$$\Omega=\{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}.$$

Έχοντας υπόψη το δειγματικό χώρο $\Omega$ και την αντίστοιχη ιδιότητα έχουμε:

✓ $A_1=\{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}$ με $N(A_1)=4$

$$\text{άρα } P(A_1)=\frac{N(A_1)}{N(\Omega)}=\frac{4}{8}$$

✓ $A_2=\{KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}$ με $N(A_2)=3$,

$$\text{άρα } P(A_2)=\frac{N(A_2)}{N(\Omega)}=\frac{3}{8}$$

- ✓ $A_3 = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}$, (Παρατηρούμε ότι $A_3 = A_1$) με $N(A_3) = 4$

$$\text{άρα } P(A_3) = \frac{N(A_3)}{N(\Omega)} = \frac{4}{8}$$

- ✓ $A_4 = \{KKK, \Gamma\Gamma\Gamma\}$ με $N(A_4) = 2$,

$$\text{άρα } P(A_4) = \frac{N(A_4)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8}$$

- ✓ $A_5 = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma\}$ με $N(A_5) = 4$,

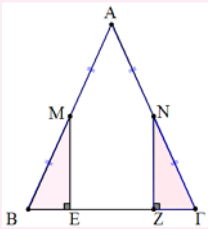
$$\text{άρα } P(A_5) = \frac{N(A_5)}{N(\Omega)} = \frac{4}{8}.$$

**27.** Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων

Αν το τρίγωνο $\mathbf{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές με $\mathbf{AB = A\Gamma}$, $\mathbf{M}$ και $\mathbf{N}$ είναι τα μέσα των $\mathbf{AB}$ και $\mathbf{A\Gamma}$ αντίστοιχα και $\mathbf{ME \perp B\Gamma}$, $\mathbf{NZ \perp B\Gamma}$,

**α.** Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $\mathbf{BME}$ και $\mathbf{NZ\Gamma}$ είναι ίσα.

**β.** Να δείξετε ότι $\mathbf{ME = NZ}$.




Μονάδες (3,3+3,3)=6,6

Λύση

**α.** Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $BME$ και $NZ\Gamma$ έχουμε:

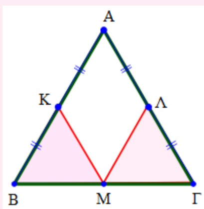
- Είναι ορθογώνια (αφού $ME \perp B\Gamma$ και $NZ \perp B\Gamma$)
- $BM = N\Gamma$ (ως μισά των ίσων πλευρών $AB$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$)
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (ως παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$)

Επομένως τα τρίγωνα $BME$ και $NZ\Gamma$ είναι ίσα ως ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση.

**β.** Από την ισότητα των τριγώνων $BME$ και $NZ\Gamma$ έπεται ότι $ME = NZ$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

**28.** Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων

Αν σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ τα σημεία $K$, $\Lambda$, $M$ είναι τα μέσα των πλευρών $AB$, $A\Gamma$, $B\Gamma$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $KM = \Lambda M$.




Μονάδες 6,6

## Λύση

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $BKM$ και $\Gamma\Lambda M$ έχουμε:

- $BM = M\Gamma$ (αφού το $M$ είναι μέσο της $B\Gamma$)
- $BK = \Gamma\Lambda$ (ως μισά των των ίσων πλευρών $AB$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$)
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (ως παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$)

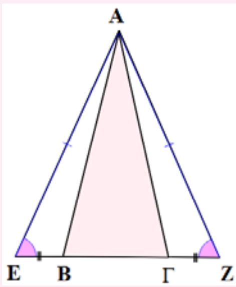
Επομένως από το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα $BKM$ και $\Gamma\Lambda M$ είναι ίσα. Οπότε έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες. Δηλαδή $KM = \Lambda M$.

**29.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathbf{AB\Gamma}$ $(\mathbf{AB = A\Gamma})$ και στις προεκτάσεις της πλευράς $\mathbf{B\Gamma}$ παίρνουμε τα σημεία $\mathbf{E}$, $\mathbf{Z}$ έτσι ώστε να ισχύει $\mathbf{BE = \Gamma Z}$. Να αποδείξετε ότι:

**α.** τα τρίγωνα $\mathbf{AEB}$ και $\mathbf{A\Gamma Z}$ είναι ίσα

**β.** το τρίγωνο $\mathbf{AEZ}$ είναι ισοσκελές.




Μονάδες (3,3+3,3)=6,6

## Λύση

**α.** Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $AEB$ και $A\Gamma Z$ έχουμε:

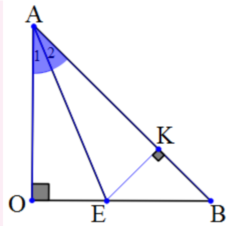
- $BE = \Gamma Z$ (από την υπόθεση)
- $AB = A\Gamma$ (αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές).
- $A\hat{B}E = A\hat{\Gamma}Z$ (ως παραπληρώματα των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$)

Επομένως από το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα $AEB$ και $A\Gamma Z$ είναι ίσα.

**β.** Από την ισότητα των τριγώνων $AEB$ και $A\Gamma Z$ έπεται ότι $AE = AZ$, άρα το τρίγωνο $AEZ$ είναι ισοσκελές.

**30.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\mathbf{OAB}$, με $\mathbf{\hat{O} = 90^o}$ φέρνουμε τη διχοτόμο $\mathbf{AE}$ και την $\mathbf{EK}$ κάθετη στην $\mathbf{AB}$.




**α.** Συγκρίνοντας τα κατάλληλα τρίγωνα να αποδείξετε ότι $\mathbf{AO = AK}$.

**β.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα **ΟΑΒ** και **ΒΕΚ** είναι όμοια.

Μονάδες (2+3+1,6)=6,6

Λύση

**α.** Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΚΑΕ έχουμε:

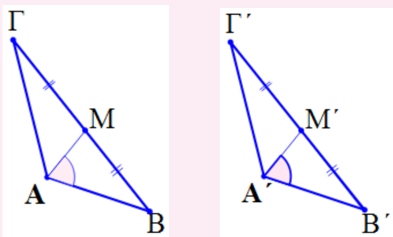
- Είναι ορθογώνια (αφού $\widehat{O} = 90^o$ και $EK \perp AB$)
- Η πλευρά ΑΕ είναι κοινή και
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (αφού η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$).

Επομένως τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΚΑΕ είναι ίσα ως ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση. Άρα είναι $OA = AK$ (αφού βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες).

**β.** Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΒΕΚ έχουν δύο ίσες γωνίες, αφού $\hat{O} = \hat{K} = 90^o$ και η γωνία $\hat{B}$ είναι κοινή. Επομένως είναι όμοια.

**31.** Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων

Τα τρίγωνα **ΑΒΓ** και $\mathbf{A'B'\Gamma'}$ έχουν $\mathbf{AM = A'M'}$, $\mathbf{AB = A'B'}$ τις γωνίες $\mathbf{B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'}$ όπου **ΑΜ**, $\mathbf{A'M'}$ είναι οι διάμεσοι των τριγώνων.




Να δείξετε ότι:

**α.** $\mathbf{BM = B'M'}$

**β.** Τα τρίγωνα **ΑΒΓ** και $\mathbf{A'B'\Gamma'}$ είναι ίσα.

Μονάδες (3,3+3,3)=6,6

Λύση

**α.** Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΒΜ και $A'B'M'$ έχουμε:

- $AM = A'M'$ (από υπόθεση)
- $AB = A'B'$ (από υπόθεση) και
- $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$ (από υπόθεση)

Επομένως από το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα $ABM$ και $A'B'M'$ είναι ίσα. Άρα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες, δηλαδή $BM = B'M'$.

**β.** Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουμε:

- $AB = A'B'$ (από υπόθεση)
- $B\Gamma = B'\Gamma'$ γιατί
  - $BM = \frac{B\Gamma}{2}$ (αφού το $M$ είναι μέσο της $B\Gamma$)
  - $B'M' = \frac{B'\Gamma'}{2}$ (αφού το $M'$ είναι μέσο της $B'\Gamma'$)
  - ενώ (από το ερώτημα α) $BM = B'M'$ συνεπώς $\frac{B\Gamma}{2} = \frac{B'\Gamma'}{2}$ έτσι $B\Gamma = B'\Gamma'$
- $\widehat{B} = \widehat{B'}$ (από την ισότητα των τριγώνων $ABM$ και $A'B'M'$)

Επομένως τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα από το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$.

**32.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο $\mathbf{AB\Gamma}$ με βάση $\mathbf{B\Gamma}$ και $\mathbf{A\Delta}$ η διχοτόμος του. Αν $\mathbf{K}$ είναι ένα σημείο της $\mathbf{A\Delta}$, να δείξετε ότι:

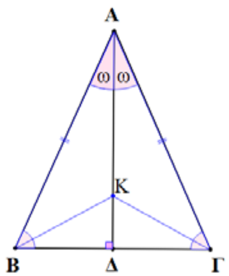
**α.** Τα τρίγωνα $\mathbf{ABK}$ και $\mathbf{A\Gamma K}$ είναι ίσα

**β.** Το τρίγωνο $\mathbf{B\Gamma K}$ είναι ισοσκελές

Μονάδες (3,3+3,3)=6,6

## Λύση

**α.** Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $ABK$ και $A\Gamma K$ έχουμε:



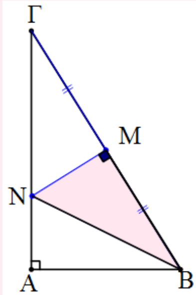

- $AB = A\Gamma$ (αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές)
- η πλευρά $AK$ είναι κοινή και
- $B\hat{A}K = \Gamma\hat{A}K$ (αφού η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$)

Επομένως από το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα $ABK$ και $A\Gamma K$ είναι ίσα.

**β.** Από την ισότητα των τριγώνων $ΑΒΚ$ και $ΑΓΚ$ έχουμε ότι $ΒΚ = ΚΓ$ και συνεπώς το τρίγωνο $ΒΓΚ$ είναι ισοσκελές.

**33.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο $\mathbf{ΑΒΓ}$ το $\mathbf{Μ}$ είναι το μέσο της πλευράς $\mathbf{ΒΓ}$ και η $\mathbf{ΜΝ}$ είναι μεσοκάθετος της $\mathbf{ΒΓ}$.




**α.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\mathbf{ΓΝΜ}$ και $\mathbf{ΒΝΜ}$ είναι ίσα.

**β.** **i.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\mathbf{ΝΜΒ}$ και $\mathbf{ΑΒΓ}$ είναι όμοια.

**ii.** Να γράψετε τους λόγους της παραπάνω ομοιότητας.

Μονάδες [3,5+(1+2,2)]=6,7

## Λύση

**α.** Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $ΓΝΜ$ και $ΒΝΜ$ έχουμε:

- Είναι ορθογώνια (αφού $ΝΜ \perp ΒΓ$)
- $ΝΓ = ΝΒ$ (αφού το σημείο $Ν$ ανήκει στη μεσοκάθετο του $ΒΓ$, ισαπέχει από τα $Β$ και $Γ$).
- Η πλευρά $ΝΜ$ είναι κοινή.

Επομένως τα τρίγωνα $ΓΝΜ$ και $ΒΝΜ$ είναι ίσα ως ορθογώνια με ίσες μία προς μία δύο ανάλογες πλευρές.

**β. i.** Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΝΜΒ$ έχουν $\hat{Γ} = Ν\hat{Β}Μ$ (από την ισότητα των τριγώνων $ΓΝΜ$ και $ΒΝΜ$) και $\hat{Μ} = \hat{Α} = 90^\circ$. Άρα τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΝΜΒ$ είναι όμοια.

**Σχόλιο:**

**Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΔ είναι όμοια με $\hat{Α} = \hat{Ε}$, $\hat{Β} = \hat{Δ}$, $\hat{Γ} = \hat{Ζ}$ τότε τη σχέση ομοιότητας τη γράφουμε ως έξης**

- στην πρώτη θέση βάζουμε τις αντίστοιχες ίσες γωνίες $\hat{Α} = \hat{Ε}$

$$Α\_\,\_ \approx Ε\_\,\_$$

- στην δεύτερη θέση βάζουμε τις αντίστοιχες ίσες γωνίες $\hat{Β} = \hat{Δ}$

$$Α\underline{Β}\_ \approx Ε\underline{Δ}\_$$

- Και συμπληρώνουμε με τις γωνίες $\hat{Γ}$ και $\hat{Ζ}$ των τριγώνων **ΑΒΓ**, **ΖΕΔ** αντίστοιχα

$$ΑΒΓ \approx ΕΔΖ$$

**ii.** Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΜΝΒ έπεται ότι οι ανάλογες πλευρές τους είναι ανάλογες. Δηλαδή ισχύει: $\frac{AB}{MN} = \frac{B\Gamma}{BN} = \frac{\Gamma A}{MB}$.

Στην συνέχεια γράφουμε τους λόγους ομοιότητας ως εξής $\frac{AB}{--} = \frac{B\Gamma}{--} = \frac{\Gamma A}{--}$

Και συμπληρώνουμε τους παρονομαστές διατηρώντας την ιδία σειρά ίσων γωνιών αντίστοιχα

$$\frac{AB}{E\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Delta Z} = \frac{\Gamma A}{ZE}$$

**34.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Δίνεται αμβλυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\mathbf{AB = A\Gamma}$. Προεκτείνουμε τη βάση **ΒΓ** προς το μέρος των κορυφών **Β , Γ** και πάνω στις προεκτάσεις παίρνουμε σημεία **Δ , Ε** τέτοια ώστε $\mathbf{B\Delta = \Gamma E = \frac{1}{2}AB}$.

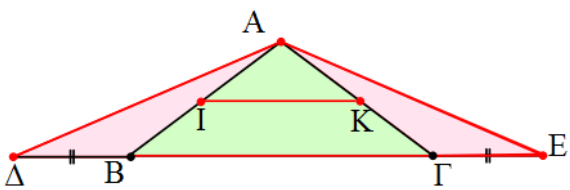
**α.** Να δείξετε ότι $\mathbf{A\Delta = AE}$.

**β.** Να δείξετε ότι τα τρίγωνα **ΑΒΓ** και **ΑΙΚ** είναι όμοια, όπου **Ι , Κ** τα μέσα των πλευρών **ΑΒ** και **ΑΓ** αντίστοιχα και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους $\boldsymbol{\lambda > 1}$.

Μονάδες (3+3,7)=6,7

Λύση

**α.** Για να δείξουμε ότι $A\Delta = AE$ συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ τα οποία έχουν:




- $AB = A\Gamma$ (αφού το ΑΒΓ είναι ισοσκελές).
- $B\Delta = \Gamma E = \frac{1}{2}AB$ (από υπόθεση).
- $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$ (ως παραπληρώματα των ίσων γωνιων $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ)

Επομένως από το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα, συνεπώς $A\Delta = AE$.

**β.** Επειδή Ι, Κ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, είναι $IK//B\Gamma$. Συνεπώς:

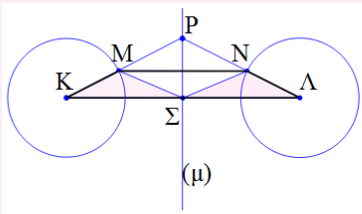
- $\hat{B} = A\hat{I}K$ ως εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $IK$ και $B\Gamma$ με τέμνουσα την $AB$
- Η γωνία $\hat{A}$ είναι κοινή

Επομένως τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AIK$ είναι όμοια. Συνεπώς έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Άρα ισχύει: $\frac{AB}{AI} = \frac{B\Gamma}{IK} = \frac{\Gamma A}{KA} = \frac{2}{1}$ αφού AB=2AI.

Συνεπώς ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι $\lambda = \frac{2}{1} = 2$

**35.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Δύο ίσοι κύκλοι με κέντρα **Κ** και **Λ** δεν τέμνονται. Θεωρούμε **Σ** το μέσον της διακέντρου **ΚΛ** και έστω **Ρ** ένα τυχαίο σημείο πάνω στην μεσοκάθετο του **ΚΛ** (το **Ρ** είναι διαφορετικό από το **Σ**). Οι ευθείες **ΡΚ** και **ΡΛ** τέμνουν τους δύο κύκλους στα σημεία **Μ** και **Ν** αντιστοίχως.




**α.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα **ΜΚΣ** και **ΝΛΣ** είναι ίσα.

**β.** Να αποδείξετε ότι οι ευθείες **ΜΝ** και **ΚΛ** είναι παράλληλες.

**γ.** Τι σχήμα είναι το τετράπλευρο **ΚΛΝΜ** ;

Μονάδες (2,2+2,2+2,2)=6,6

## Λύση

**α.** Το σημείο $P$ ανήκει στη μεσοκάθετο του $K\Lambda$ και συνεπώς ισαπέχει από τα άκρα του. Δηλαδή είναι $PK = P\Lambda$. Επομένως το τρίγωνο $PK\Lambda$ είναι ισοσκελές.

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $MK\Sigma$ και $\Sigma N\Lambda$ έχουμε:

- $KM = \Lambda N$ (ως ακτίνες ίσων κύκλων)
- $K\Sigma = \Sigma\Lambda$ (αφού το σημείο $\Sigma$ είναι το μέσο της $K\Lambda$) και
- $M\hat{K}\Sigma = N\hat{\Lambda}\Sigma$ (ως παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου $PK\Lambda$)

Επομένως από το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα $MK\Sigma$ και $\Sigma N\Lambda$ είναι ίσα.

**β.** Είναι $PM = PN$ ως διαφορές των ίσων τμημάτων $PK = P\Lambda$ και $MK = \Lambda N$. Δηλαδή το τρίγωνο $PMN$ είναι ισοσκελές με $P\widehat{M}N = P\widehat{N}M$.

- Στο τρίγωνο $PMN$ έχουμε:

$$P\widehat{M}N + P\widehat{N}M + \hat{P} = 180^\circ \text{ ή } 2P\widehat{M}N + \hat{P} = 180^\circ \text{ ή } P\widehat{M}N = \frac{180^\circ - \hat{P}}{2} \ :(1)$$

- Στο ισοσκελές τρίγωνο $PK\Lambda$ με $P\widehat{K}\Lambda = P\widehat{\Lambda}K$ έχουμε:

$$P\widehat{K}\Lambda + P\widehat{\Lambda}K + \hat{P} = 180^\circ \text{ ή } 2P\widehat{K}\Lambda + \hat{P} = 180^\circ \text{ ή } P\widehat{K}\Lambda = \frac{180^\circ - \hat{P}}{2} \ :(2)$$

Από τις σχέσεις $(1)$ και $(2)$ έχουμε ότι $P\widehat{M}N = P\widehat{K}\Lambda$.
Δηλαδή οι $MN$ και $K\Lambda$ τεμνόμενες από την $PK$ σχηματίζουν δύο γωνίες εντός, εκτός και επί τα αυτά ίσες. Επομένως είναι $MN // K\Lambda$.

**γ.** Στο τετράπλευρο $K\Lambda NM$ είναι $MN // K\Lambda$ και οι $KM$ και $\Lambda N$ δεν είναι παράλληλες αφού τέμνονται στο σημείο $P$. Επομένως το τετράπλευρο $K\Lambda NM$ είναι τραπέζιο. Επιπλέον είναι $KM = \Lambda N$ και άρα το $K\Lambda NM$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**36.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $\mathbf{AB\Gamma\Delta}$ δίνονται $\mathbf{AB = 13m}$ και $\mathbf{B\Gamma = 7m}$. Το $\mathbf{E}$ είναι σημείο της $\mathbf{AB}$ έτσι ώστε $\mathbf{BE = 3m}$ και το $\mathbf{Z}$ σημείο της $\mathbf{\Gamma\Delta}$ έτσι ώστε $\mathbf{\Gamma Z = 6m}$. Οι ευθείες $\mathbf{E\Gamma}$ και $\mathbf{AZ}$ τέμνονται στο $\mathbf{H}$. Από το $\mathbf{H}$ φέρνουμε $\mathbf{H\Theta \perp AB}$ που τέμνει την προέκταση της $\mathbf{AB}$ στο $\mathbf{\Theta}$.

**α.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\mathbf{AEH}$ και $\mathbf{Z\Gamma H}$ είναι όμοια και να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των εν λόγω τριγώνων.

**β.** Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο συμπέρασμα να αποδείξετε ότι: $\mathbf{\dfrac{E\Gamma}{EH} = \dfrac{2}{5}}$

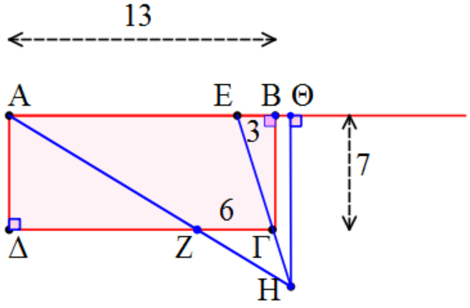
**γ.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\mathbf{EB\Gamma}$ και $\mathbf{E\Theta H}$ είναι όμοια και να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $\mathbf{\Theta H}$.

Μονάδες $(2+2+2,7)=6,7$

## Λύση

**α.**

Τα τρίγωνα $AEH$ και $Z\Gamma H$ έχουν:




- Επειδή $Z\Gamma // AB$, είναι $H\hat{Z}\Gamma = H\hat{A}E$ ως εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $AB$ και $Z\Gamma$ με τέμνουσα την $AH$.
- Η γωνία $\hat{H}$ είναι κοινή.

Επομένως τα τρίγωνα ΑΕΗ και ΖΓΗ είναι όμοια και συνεπώς ισχύουν οι λόγοι:

$$\frac{AE}{Z\Gamma}=\frac{EH}{\Gamma H}=\frac{HA}{HZ}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3} \quad \text{αφού } AE=AB-BE=13-3=10 \text{ και } \Gamma Z=6.$$

**β.** Επειδή είναι $\frac{EH}{\Gamma H}=\frac{5}{3}$, έχουμε

$\frac{\Gamma H}{EH}=\frac{3}{5}$ αφαιρώντας τους παρανομαστές από τους αριθμητές έχουμε

$\frac{EH-\Gamma H}{EH}=\frac{5-3}{5}$ όμως $EH-\Gamma H=E\Gamma$ οπότε $\frac{E\Gamma}{EH}=\frac{2}{5}$.

**γ.** Επειδή $B\Gamma//H\Theta$ (ως κάθετες στην ίδια ευθεία) είναι $\hat{B}=\hat{\Theta}=90^o$. Επιπλέον τα τρίγωνα $EB\Gamma$ και $E\Theta H$ έχουν τη γωνία $\hat{E}$ κοινή. Οπότε είναι $E\overset{\Delta}{B}\Gamma \approx E\overset{\Delta}{\Theta}H$.

Συνεπώς έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

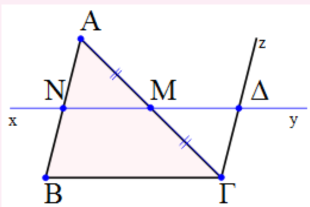
Άρα: $\frac{EB}{E\Theta}=\frac{B\Gamma}{\Theta H}=\frac{\Gamma E}{HE}$ όμως $B\Gamma=7$, $BE=3$ έτσι

$\frac{3}{E\Theta}=\frac{7}{\Theta H}=\frac{\Gamma E}{HE}$ επίσης από ερώτημα β) είναι $\frac{\Gamma E}{HE}=\frac{2}{5}$ οπότε

$\frac{3}{E\Theta}=\frac{7}{\Theta H}=\frac{\Gamma E}{HE}=\frac{2}{5}$ οπότε προκύπτει $\frac{7}{\Theta H}=\frac{2}{5}$ ή $\boxed{\Theta H=\frac{35}{2}}$

**37.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Στο διπλανό σχήμα έχουμε: $\mathbf{AM=M\Gamma}$, $\mathbf{\Gamma z//AB}$ και $\mathbf{xy//B\Gamma}$.




Να αποδείξετε ότι:

**α.** $\mathbf{A\overset{\Delta}{N}M=\Gamma\overset{\Delta}{\Delta}M}$ (ίσα)

**β.** $\mathbf{\Delta\overset{\Delta}{M}\Gamma\approx A\overset{\Delta}{B}\Gamma}$ (όμοια)

**γ.** Το τρίγωνο **ΑΒΓ** και το παραλληλόγραμμο **ΒΓΔΝ** έχουν το ίδιο εμβαδόν.

Μονάδες (3+3,7)=6,7

## Λύση

**α.** Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΝΜ και ΓΜΔ έχουμε:

- $AM=M\Gamma$ (αφού το Μ είναι μέσο της ΑΓ)

- $A\widehat{M}N = \Gamma\widehat{M}\Delta$ (ως κατακορυφήν) και
- $\widehat{A} = A\widehat{\Gamma}Z$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB$ και $\Gamma z$ με τέμνουσα την $A\Gamma$)

Επομένως από το κριτήριο $\Gamma - \Pi - \Gamma$ τα τρίγωνα $ANM$ και $\Gamma M\Delta$ είναι ίσα.

**β.** Τα τρίγωνα $\Delta M\Gamma$ και $AB\Gamma$ έχουν:

- $\widehat{A} = M\widehat{\Gamma}\Delta$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB$ και $\Gamma z$ με τέμνουσα την $A\Gamma$)
- $A\widehat{M}N = \widehat{\Gamma} \ :(1)$, ως εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $xy$ και $B\Gamma$ με τέμνουσα την $A\Gamma$. Επιπλέον, $A\widehat{M}N = \Gamma\widehat{M}\Delta \ :(2)$, ως κατακορυφήν. Από τις $(1)$ και $(2)$ προκύπτει ότι $\widehat{\Gamma} = \Gamma\widehat{M}\Delta$.

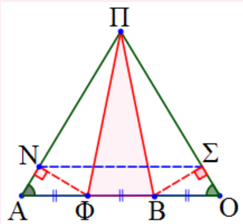
Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα τρίγωνα $\Delta M\Gamma$ και $AB\Gamma$ έχουν δύο ίσες γωνίες και επομένως είναι όμοια.

**γ.** Τα τρίγωνα $ANM$ και $\Gamma M\Delta$ ως ίσα είναι και ισεμβαδικά. Έχουμε:

$$E_{B\Gamma\Delta N} = E_{BNM\Gamma} + E_{\Gamma\Delta M} = E_{BNM\Gamma} + E_{ANM} = E_{AB\Gamma}$$

**38.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathbf{\Pi AO}$ με $\mathbf{\Pi A = \Pi O}$. Παίρνουμε σημεία $\mathbf{\Phi}$ και $\mathbf{B}$ στην πλευρά $\mathbf{AO}$ έτσι ώστε $\mathbf{A\Phi = \Phi B = BO}$. Από τα $\mathbf{\Phi}$ και $\mathbf{B}$ φέρνουμε τις κάθετες $\mathbf{\Phi N}$ και $\mathbf{B\Sigma}$ προς τις πλευρές $\mathbf{\Pi A}$ και $\mathbf{\Pi O}$ αντίστοιχα.




Να αποδείξετε ότι:

**α.** Τα τρίγωνα $\mathbf{\Pi A\Phi}$ και $\mathbf{\Pi OB}$ είναι ίσα.

**β.** $\mathbf{\Phi N = B\Sigma}$ και ότι το τρίγωνο $\mathbf{\Pi N\Sigma}$ είναι ισοσκελές.

**γ.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\mathbf{\Pi AO}$ και $\mathbf{\Pi N\Sigma}$ είναι όμοια δηλαδή $\mathbf{\Pi \overset{\Delta}{A} O \approx \Pi \overset{\Delta}{N} \Sigma}$ και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

Μονάδες (2,2+2,2+2,2)=6,6

Λύση

**α.** Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $\Pi A\Phi$ και $\Pi OB$ έχουμε:

- $\Pi A = \Pi O$ (από τη υπόθεση)
- $A\Phi = BO$ (από την υπόθεση) και
- $\widehat{A} = \widehat{O}$ (ως παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου $\Pi AO$)

Από το κριτήριο $\Pi-\Gamma-\Pi$ τα τρίγωνα $\Pi A \Phi$ και $\Pi O B$ είναι ίσα.

**β.** Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $N A \Phi$ και $B O \Sigma$ έχουμε:

- Είναι ορθογώνια (αφού $\Phi N \perp \Pi A$ και $B\Sigma \perp \Pi O$)
- $\widehat{A}=\widehat{O}$ (ως παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου $\Pi A O$)

Επομένως τα τρίγωνα $N A \Phi$ και $B O \Sigma$ είναι ίσα ως ορθογώνια τρίγωνα με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση.

Άρα είναι $\Phi N = B\Sigma$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{O}$ αντίστοιχα. Ακόμη είναι $AN = O\Sigma$, οπότε και $\Pi N = \Pi\Sigma$ ως διαφορές ίσων τμημάτων. Οπότε, αφού είναι $\Pi N = \Pi \Sigma$, το τρίγωνο $\Pi N \Sigma$ είναι ισοσκελές.

**γ.** • Στο ισοσκελές τρίγωνο $\Pi N \Sigma$ έχουμε:

$$\Pi\widehat{N}\Sigma+\Pi\widehat{\Sigma}N+\widehat{\Pi}=180^{\circ} \text{ ή } 2\Pi\widehat{N}\Sigma+\widehat{\Pi}=180^{\circ} \text{ ή } \Pi\widehat{N}\Sigma=\frac{180^{\circ}-\widehat{\Pi}}{2} \quad :(1)$$

- Στο ισοσκελές τρίγωνο $\Pi A O$ έχουμε:

$$\Pi\widehat{A}O+\Pi\widehat{O}A+\widehat{\Pi}=180^{\circ} \text{ ή } 2\Pi\widehat{A}O+\widehat{\Pi}=180^{\circ} \text{ ή } \Pi\widehat{A}O=\frac{180^{\circ}-\widehat{\Pi}}{2} \quad :(2)$$

Από τις σχέσεις $(1)$ και $(2)$ έχουμε ότι $\Pi\widehat{N}\Sigma \approx \Pi\widehat{A}O$.

Δηλαδή οι $N\Sigma$ και $AO$ τεμνόμενες από την $\Pi A$ σχηματίζουν δύο γωνίες εντός, εκτός και επί τα αυτά ίσες. Επομένως είναι $N\Sigma // AO$.

Τα τρίγωνα $\Pi A O$ και $\Pi N \Sigma$, έχουν κοινή τη γωνία $\widehat{\Pi}$ και $\Pi\widehat{N}\Sigma=\widehat{A}$ ως εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $N\Sigma$ και $AO$ με τέμνουσα την $\Pi A$. Συνεπώς $\Pi\overset{\Delta}{A}O \approx \Pi\overset{\Delta}{N}\Sigma$, οπότε: $\lambda=\frac{\Pi A}{\Pi N}=\frac{AO}{N\Sigma}=\frac{O\Pi}{\Sigma\Pi}$.

## Κεφ. 2ο | ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

**39.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Αν γνωρίζουμε ότι η γωνία ω είναι οξεία και το $\eta\mu\omega=\frac{4}{5}$, τότε:

**α.** να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega$,

**β.** με βάση τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega$, που υπολογίσατε προηγουμένως να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A=\frac{1}{3}\eta\mu\omega+\frac{2}{3}\sigma\upsilon\nu\omega-\frac{1}{10}\varepsilon\varphi\omega$.

Μονάδες (3,7+3)=6,7

### Λύση

**α.** Από την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ για $\eta\mu\omega=\frac{4}{5}$ έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\eta\mu^2\omega=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{25-16}{25}=\frac{9}{25}\ \text{άρα}\ \sigma\upsilon\nu\omega=\pm\sqrt{\frac{9}{25}}$$

και επειδή η γωνία $\omega$ είναι οξεία, έχουμε $\sigma\upsilon\nu\omega>0$. Άρα:

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{3}{5},\qquad \text{οπότε:}\quad \varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}\cdot 3}=\frac{4}{3}.$$

**Σχόλιο:**

Αν η γωνία ω είναι οξεία , ισχύουν: $\eta\mu\omega>0$, $\sigma\upsilon\nu\omega>0$, $\varepsilon\varphi\omega>0$.

**β.** Έχουμε: $A=\frac{1}{3}\eta\mu\omega+\frac{2}{3}\sigma\upsilon\nu\omega-\frac{1}{10}\varepsilon\varphi\omega=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\right)-\frac{1}{10}\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{15}+\frac{6}{15}-\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{3}=$

$$=\frac{4}{15}+\frac{6}{15}-\frac{1}{\cancel{2}\cdot 5}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot 2}{3}=\frac{4}{15}+\frac{6}{15}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{15}+\frac{6}{15}-\frac{2}{15}=\frac{4+6-2}{15}=\frac{8}{15}.$$

**40.** **Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων**

Αν $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{4}{5}$ και $90^\circ<x<180^\circ$,

**α.** Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x=\frac{3}{5}$ και $\varepsilon\varphi x=-\frac{3}{4}$

**β.** Να υπολογίσετε τα $\eta\mu\left(180^\circ-x\right)$ και $\varepsilon\varphi\left(180^\circ-x\right)$.

**γ.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = ημ(180^\circ - x) + 2συνx - 4εφ(180^\circ - x)$$

Μονάδες (2,7+2+2)=6,7

Λύση

**α.** Από την ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ για $συνx = -\frac{4}{5}$ έχουμε:

$ημ^2x = 1 - συν^2x = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$, άρα $ημx = \pm\frac{3}{5}$ και επειδή για $90^o < x < 180^o$

είναι $ημx > 0$, έχουμε: $ημx = \frac{3}{5}$, συνεπώς: $εφx = \frac{ημx}{συνx} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$.

**Σχόλιο:**

Αν $90^o < x < 180^o$, η γωνία ω είναι αμβλεία και ισχύουν: $ημω > 0$, $συνω < 0$, $εφω < 0$.

**β.** Ισχύει: $ημ(180 - x) = ημx = \frac{3}{5}$ $\quad εφ(180 - x) = -εφx = -\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$

**Σχόλιο:**

Γενικά για δυο παραπληρωματικές γωνίες ω και $180^o - ω$ ισχύουν:

$$\boxed{ημ(180^o - ω) = ημω \qquad συν(180^o - ω) = -συνω \qquad εφ(180^o - ω) = -εφω}$$

**γ.** Έχουμε:

$$A = ημ(180^\circ - x) + 2συνx - 4εφ(180^\circ - x) = \frac{3}{5} + 2\left(-\frac{4}{5}\right) - 4\frac{3}{4} = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} - 3 = -\frac{5}{5} - 3 = -4.$$

**41.** Θέμα Προαγωγικών Εξετάσεων

**α.** Να αποδείξετε ότι: $(3ημω + 4συνω)^2 + (4ημω - 3συνω)^2 = 25$

**β.** Να αποδείξετε ότι:

$$ημ150^\circ \cdot (ημ120^\circ)^2 + συν135^\circ \cdot συν150^\circ + (ημ135^\circ)^2 \cdot συν120^\circ - ημ60^\circ \cdot συν45^\circ = \frac{1}{8}$$

Μονάδες (3+3,7)=6,7

Λύση

**α.** Έχουμε: $(3ημω + 4συνω)^2 + (4ημω - 3συνω)^2 =$

$= (3ημω)^2 + 2 \cdot 3ημω \cdot 4συνω + (4συνω)^2 + (4ημω)^2 - 2 \cdot 4ημω \cdot 3συνω + (3συνω)^2 =$

$= 9ημ^2ω + \cancel{24ημω \cdot συνω} + 16συν^2ω + 16ημ^2ω - \cancel{24ημω \cdot συνω} + 9συν^2ω =$

$$=25\eta\mu^2\omega+25\sigma\upsilon\nu^2\omega=25\left(\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega\right)=25\cdot 1=25.$$

**β.** Επειδή γωνίες παραπληρωματικές έχουν ίσα ημίτονα και αντίθετα συνημίτονα, έχουμε:

- $\eta\mu 150^\circ=\eta\mu\left(180^\circ-30^\circ\right)=\eta\mu 30^\circ=\frac{1}{2}$, • $\eta\mu 120^\circ=\eta\mu\left(180^\circ-60^\circ\right)=\eta\mu 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$,
- $\sigma\upsilon\nu 135^\circ=\sigma\upsilon\nu\left(180^\circ-45^\circ\right)=-\sigma\upsilon\nu 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,
- $\sigma\upsilon\nu 150^\circ=\sigma\upsilon\nu\left(180^\circ-30^\circ\right)=-\sigma\upsilon\nu 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ • $\eta\mu 135^\circ=\eta\mu\left(180^\circ-45^\circ\right)=\eta\mu 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu 120^\circ=\sigma\upsilon\nu\left(180^\circ-60^\circ\right)=-\sigma\upsilon\nu 60^\circ=-\frac{1}{2}$, • $\eta\mu 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και • $\sigma\upsilon\nu 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Επομένως είναι:

$$\eta\mu 150^\circ\cdot\left(\eta\mu 120^\circ\right)^2+\sigma\upsilon\nu 135^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu 150^\circ+\left(\eta\mu 135^\circ\right)^2\cdot\sigma\upsilon\nu 120^\circ-\eta\mu 60^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu 45^\circ=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\cancel{\frac{\sqrt{6}}{4}}-\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}-\cancel{\frac{\sqrt{6}}{4}}=\frac{3}{8}-\frac{2}{8}=\frac{1}{8}.$$

1

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θέμα 1ο

**Α.** Να συμπληρώσετε τις σχέσεις που ακολουθούν ώστε να προκύψουν γνωστές ταυτότητες.

**i.** $(\alpha+\beta)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

**ii.** $(\alpha+\beta)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

**iii.** $\alpha^2-\beta^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

**Β.** Να συμπληρώσετε και να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha-\beta)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Μονάδες [(1+1+1)+3,6]=6,6

## Θέμα 2ο

**Α.** Ποια είναι η **χαρακτηριστική ιδιότητα** της **μεσοκαθέτου** ενός ευθύγραμμου τμήματος; Να γράψετε και το **αντίστροφο** και να κάνετε και το σχήμα.

**Β.** **Να συμπληρώσετε τις προτάσεις:** (Να κάνετε και τα σχήματα)

**1.** Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$), η διχοτόμος $ΑΔ$ είναι και ……………. και ……………..

**2.** Σε κάθε τρίγωνο $ΑΒΓ$, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα $Δ$ και $Ε$ των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα είναι …………………………………….

**3.** Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{Α} = 90^\circ$, η διάμεσος $ΑΔ$ ισούται με …………………..

Μονάδες [3,6+(1+1+1)]=6,6

# Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

## Ά σ κ η σ η 1η

**Α.** Να λύσετε την εξίσωση $x^2-5x+6=0$

**Β.** **i.** Να απλοποιήσετε τη ρητή αλγεβρική παράσταση:

$$\Pi(x)=\frac{x-1}{x^2-5x+6}+\frac{2}{3-x}-\frac{3}{2x-4}$$

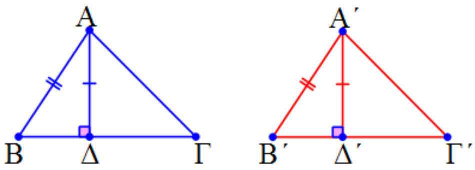
**ii.** Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του $x$ ώστε:

$$\Pi(x)=-\eta\mu^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega \text{ όπου } \omega \text{ κάποια γωνία.}$$

Μονάδες [2+(2,6+2)]=6,6

## Ά σ κ η σ η 2η

Τα τρίγωνα **ΑΒΓ** και **Α′Β′Γ′** έχουν: $\hat{A}=\hat{A}'$ και **ΑΒ = Α′Β′**. Επίσης έχουν ίσα τα ύψη τους **ΑΔ** και **Α′Δ′**.




**α.** Να αποδείξετε ότι: $\hat{B}=\hat{B}'$

**β.** Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα.

Μονάδες (3+3,6)=6,6

## Ά σ κ η σ η 3η

**Α.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| | $0^\circ$ | $90^\circ$ | $180^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ημ | | | | | | |
| συν | | | | | | |
| εφ | | | | | | |

**Β.** Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi\omega-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1-\eta\mu\omega}=-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

Μονάδες (3,6+3)=6,6

**Θ Ε Ω Ρ Ι Α**

## Θ έ μ α 1ο

Α. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες, ώστε να εκφράζουν αξιοσημείωτες ταυτότητες:

**i.** $(\alpha+\beta)^2 =$ ............................

**ii.** $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) =$ ........................

**iii.** $(\alpha-\beta)^3 =$ ................................

**Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.**

**i.** Τα μονώνυμα $\frac{2}{5}x^3y\omega^2$ και $-5x^3y\omega^2$ είναι όμοια

**ii.** Τα μονώνυμα $3x^3y^2$ και $-3x^2y^3$ είναι αντίθετα

**iii.** Κάθε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί και ως πολυώνυμο.

**iv.** Το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό $0$.

Μονάδες (3+3,6)=6,6

## Θ έ μ α 2ο

**α.** Πότε δύο τρίγωνα λέγονται **ίσα**;

**β.** Πότε δύο πολύγωνα λέγονται **όμοια**;

**γ. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:**

**i.** Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και ......................................................... τότε είναι ίσα.

**ii.** Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν μια αντίστοιχη πλευρά ίση και μια ..................... ίση.

**iii.** Δύο κανονικά πολύγωνα που έχουν ...................... είναι όμοια.

**iv.** Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με ............................. του λόγου ομοιότητάς τους.

Μονάδες (2,1+2,1+2,4)=6,6

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

Δίνονται οι εξισώσεις: $2x^2-9x-5=0$ και $4x^2+4x+1=0$.

**α.** Να λύσετε τις παραπάνω εξισώσεις.

**β.** Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα: $2x^2-9x-5$ και $4x^2+4x+1$.

**γ.** Να απλοποιήσετε το κλάσμα: $\dfrac{2x^2-9x-5}{4x^2+4x+1}$.

Μονάδες (2,6+2+2)=6,6

### Άσκηση 2η

Να αποδείξετε ότι τα συστήματα:

$$\begin{cases} \dfrac{7x+y}{3}-\dfrac{y-1}{2}=x+3 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{9y-1}{4}=-x+1 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} 8x-y=15 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$$ έχουν την ίδια λύση.

Μονάδες 6,6

### Άσκηση 3η

Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $ΑΒ=12$, $ΒΓ=13$, $ΑΓ=5$. Αν $Δ$ σημείο της $ΒΓ$ και $ΔΕ$ κάθετη στην $ΒΓ$ ώστε $ΔΕ=4$ τότε:

**α.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο.

**β.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΔΕ$ είναι όμοια.

**γ.** Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $ΒΕ$.

**δ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΒΔΕ$.

Μονάδες (2+1,3+1,3+2)=6,6

3

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θέμα 1ο

**Α.** Να γράψετε τον ορισμό της ταυτότητας.

Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι ταυτότητες;

**i.** $3x = 12$

**ii.** $x(x+2) = x^2 + 2x$

**iii.** $x + y = 7$

**iv.** $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

**Β.** Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

**Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.**

**1.** Δύο μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές λέγονται αντίθετα.

**2.** Το μονώνυμο $2x^3y$ είναι 4ου βαθμού ως προς $x$ και $y$.

**3.** Ο αριθμός $0$ λέγεται μηδενικό πολυώνυμο και είναι μηδενικού βαθμού.

**4.** Το άθροισμα μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.

Μονάδες (2+2,2+2,4)=6,6

## Θέμα 2ο

**Α.** Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα;

**Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.**

**α.** Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

**β.** Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και μία γωνία ίση, τότε είναι ίσα.

**γ.** Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οξεία γωνία ίση, είναι όμοια.

**δ.** Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια.

Μονάδες (3+3,6)=6,6

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

Δίνεται η παράσταση $A=(1-2x)^2-(x+2)(2-x)-6x(x-1)+2$

**α.** Να αποδείξετε ότι: $A=-x^2+2x-1$

**β.** Να λύσετε την εξίσωση: $A=4x-4$

Μονάδες (3+3,6)=6,6

### Άσκηση 2η

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\dfrac{1-4x^2}{y-2xy}:\dfrac{2x+1}{2xy-3y^2}$ και $B=\dfrac{3xy+6x}{y+2}-y$

**α.** Να αποδείξετε ότι: $A=2x-3y$ και $B=3x-y$

**β.** Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} A=-4 \\ B=1 \end{cases}$

Μονάδες (3+3,6)=6,6

### Άσκηση 3η

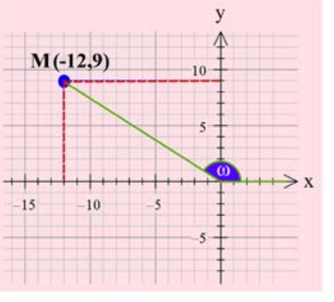
Στο διπλανό σχήμα είναι $\mathbf{M(-12,9)}$.

Αν $\boldsymbol{\omega = x\hat{O}M}$, τότε να υπολογίσετε:

**α.** Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

**β.** Την τιμή της παράστασης:

$$\mathbf{A}=\frac{-5\left[\eta\mu\left(180^\circ-\omega\right)-\sigma\upsilon\nu\left(180^\circ-\omega\right)\right]+4\varepsilon\varphi\left(180^\circ-\omega\right)}{2\eta\mu 90^\circ+2008\varepsilon\varphi 180^\circ}$$




Μονάδες (3+3,6)=6,6

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θέμα 1ο

**α.** Να διατυπώσετε δύο από τα τρία κριτήρια ισότητας τυχαίων τριγώνων.

**β.** Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

**γ.** **Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.**

1. Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.
2. Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε πάντα είναι ίσα.
3. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.
4. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε πάντα είναι ίσα.
5. Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

Μονάδες (2+2,2+2,5)=6,7

## Θέμα 2ο

**α.** Τι γνωρίζετε για την εξίσωση ευθείας με τύπο y=β και x=α;

**β.** Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις με το σωστό σύμβολο ανισότητας:

**i.** Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$ τότε $\alpha+\gamma ... \beta+\delta$

**ii.** Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma<0$ τότε $\alpha\gamma ... \beta\gamma$

**iii.** Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$ τότε $\alpha\gamma ... \beta\delta$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta$ θετικοί$)$

**iv.** Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>0$ τότε $\alpha\gamma ... \beta\gamma$

Μονάδες (2,1+2,1+2,4)=6,6

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(3x-1)^2-(x-2)(3x-1)$

**α.** Να αποδείξετε ότι $P(x)=6x^2+x-1$

**β.** Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

**γ.** Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)$.

Μονάδες (2+2,6+2)=6,6

### Άσκηση 2η

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x-2(5-y)=-2 \\ \dfrac{2(3x-y)}{3}-\dfrac{3x-2y}{2}=x \end{cases}$

**α.** Να αποδείξετε ότι το σύστημα παίρνει τη μορφή: $\begin{cases} x+2y=8 \\ -3x+2y=0 \end{cases}$

**β.** Να λύσετε το παραπάνω σύστημα, με οποιαδήποτε αλγεβρική μέθοδο θέλετε.

Μονάδες (3+3,6)=6,6

### Άσκηση 3η

Αν για την αμβλεία γωνία $\omega$ ισχύει $\eta\mu\omega=\frac{3}{5}$, τότε να υπολογίσετε:

**α.** το $\sigma\upsilon\nu\omega$

**β.** την $\varepsilon\varphi\omega$

**γ.** την τιμή της παράστασης: $A=\dfrac{\varepsilon\varphi\omega-\sigma\upsilon\nu120^\circ}{\sigma\upsilon\nu\omega-\varepsilon\varphi135^\circ}$

Μονάδες (2+2+2,6)=6,6

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θέμα 1ο

**α.** Τι ονομάζουμε πολυώνυμο και τι βαθμό πολυωνύμου ως προς μια μεταβλητή του;

**β.** Να συμπληρωθούν οι ισότητες:

**i.** $(\alpha-\beta)^2=$.......................... **ii.** $(\alpha+\beta)^2=$................................

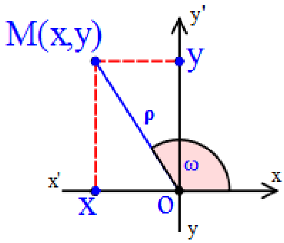
**γ.** Να εξετάσετε αν η ισότητα $(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2$ είναι ταυτότητα για οποιεσδήποτε τιμές των πραγματικών αριθμών $\alpha,\beta$.

Μονάδες (2+2,6+2)=6,6

## Θέμα 2ο

**α.** Δίνεται σημείο $\mathbf{M(x,y)}$ του επιπέδου και η γωνία $\mathbf{x\hat{O}M=\omega}$ όπως στο διπλανό σχήμα.

Να δειχτεί ότι $\mathbf{\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}$, $\mathbf{\sigma\upsilon\nu\omega\neq 0}$




**β.** **Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.**

**i.** $\sigma\upsilon\nu(180^\circ-\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$

**ii.** $\eta\mu^2\omega=\sigma\upsilon\nu^2\omega-1$

**iii.** $\eta\mu 140^\circ=\eta\mu 40^\circ$

**γ.** Τι πρόσημο έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας αμβλείας γωνίας;

Μονάδες (2,2+2,4+2)=6,6

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

Δίνεται η παράσταση $A=\dfrac{2x^3-8x}{x^2-x-6}$

**α.** Για ποιες τιμές του $x$ ορίζεται η παράσταση;

**β.** Να απλοποιηθεί η παράσταση.

**γ.** Να λυθεί η εξίσωση $A=0$.

Μονάδες (2,2+2,2+2,2)=6,6

### Άσκηση 2η

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}-\dfrac{y+1}{3}=2 \\ 2x+3(y-2)=-8 \end{cases}$

Μονάδες 6,6

### Άσκηση 3η

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{A}=90^\circ)$ με $ΑΒ=6cm$, $ΑΓ=8cm$ και έστω $Δ$ το μέσο της $ΑΓ$. Από το $Δ$ φέρνουμε κάθετη στη $ΒΓ$ και έστω $Ε$ το σημείο τομής. Να δειχθεί ότι:

**α.** Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι όμοιο με το $ΔΕΓ$

**β.** Να γραφούν οι λόγοι των ομολόγων πλευρών

**γ.** Να υπολογιστούν τα τμήματα $ΒΓ$, $ΒΕ$, $ΔΕ$.

Μονάδες (2,1+2,1+2,4)=6,6

6

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θέμα 1ο

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

Μονάδες 6,6

## Θέμα 2ο

**Α.** Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.

**Β.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α.** Ο βαθμός ενός σταθερού και μη μηδενικού πολυωνύμου είναι:

**1.** 0 **2.** 1 **3.** Δεν έχει βαθμό

**β.** Έστω ένα πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο έχει βαθμό 3 ως προς $x$ και ένα άλλο πολυώνυμο $Q(x)$ το οποίο έχει βαθμό 2 ως προς $x$, τότε το γινόμενό τους $P(x)Q(x)$ θα έχει ως προς $x$ βαθμό:

**1.** 5 **2.** 6 **3.** Δεν γνωρίζουμε

γ. Η ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της λέγεται:

**1.** Εξίσωση **2.** Πολυώνυμο **3.** Ταυτότητα

Μονάδες (3+3,6)=6,6

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

Να λύσετε την εξίσωση: $5(2x-3)(x^2+9)(x^2-6x+5)=0$

Μονάδες 6,6

### Άσκηση 2η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma$. Από το μέσο $M$ της βάσης $B\Gamma$ φέρουμε την $MK$ κάθετη προς την πλευρά $AB$ και την $M\Lambda$ κάθετη προς την πλευρά $A\Gamma$

**α.** Να αποδείξετε ότι $MK=M\Lambda$.

**β.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AK\Lambda$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες (3,3+3,3)=6,6

### Άσκηση 3η

Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} -2(2x-3y)=3(y-3x)-5 \\ \dfrac{4x-y}{2}+\dfrac{y}{3}+2=0 \end{cases}$

Μονάδες 6,6

7

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θέμα 1ο

**α.** Τι λέγεται ταυτότητα;

**β.** Να αποδειχθεί η ταυτότητα: $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

**γ.** Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες, ώστε να εκφράζουν τις αξιοσημείωτες ταυτότητες:

$(\alpha+\beta)^2=$ ................................

$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=$ ................................

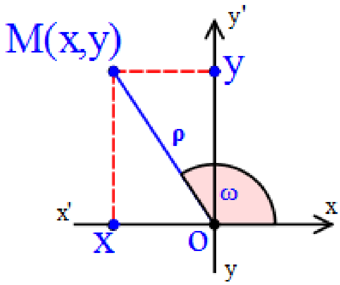
$(\alpha-\beta)^2=$ ..................................

Μονάδες (2,2+2,2+2,2)=6,6

## Θέμα 2ο

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων παίρνουμε ένα σημείο $M(x,y)$ στο 1ο τεταρτημόριο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Αν $\omega=x\hat{O}M$, να υπολογίσετε την απόσταση $\rho$ του $M$ από την αρχή τον αξόνων και να ορίσετε τα $\eta\mu\omega, \sigma\upsilon\nu\omega, \varepsilon\varphi\omega$.




**α.** Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$

**β.** Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

Μονάδες (4+2,6)=6,6

**Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ**

## Άσκηση 1η

Δίνεται το πολυώνυμο: $A = -3xy^3 + y^2 + 4x^2y$

**α.** Να βρείτε την αριθμητική τιμή του για $x = -2$ και $y = 3$.

**β.** Να γράψετε το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του $x$. Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου ως προς $x$ και $y$;

Μονάδες (3+3,6)=6,6

## Άσκηση 2η

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{x-5}{2} + \dfrac{2y+1}{3} = 3 \\ \dfrac{x+4}{3} - \dfrac{y-6}{2} = 4 \end{cases}$

Μονάδες 6,6

## Άσκηση 3η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$. Φέρνουμε τη διχοτόμο $ΑΔ$ και παίρνουμε σ' αυτή ένα τυχαίο σημείο $Μ$. Να αποδείξετε ότι:

**α.** Τα τρίγωνα $ΑΒΜ$ και $ΑΓΜ$ είναι ίσα.

**β.** Το τρίγωνο $ΒΜΓ$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες (3+3,6)=6,6

8

**Θ Ε Ω Ρ Ι Α**

## Θέμα 1ο

**Α1.** Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

**Α2.** Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:

**α.** $(\alpha-\beta)^3=$.......... **β.** $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=$.....................

**Α3.** Να αντιστοιχίσετε τις ταυτότητες της στήλης Α με τα αναπτύγματα της στήλης Β:

| Στήλη Α | Στήλη Β |
|---|---|
| **1.** $(x-y)^2$ | **α.** $(y+x)(x-y)$ |
| **2.** $(x+y)^2$ | **β.** $x^2-y^2+2xy$ |
| **3.** $x^2-y^2$ | **γ.** $x^2+y^2-2xy$ |
| **4.** $y^2-x^2$ | **δ.** $y^2+x^2+2xy$ |
| | **ε.** $(x+y)(y-x)$ |

Μονάδες (2,2+2,2+2,2)=6,6

## Θέμα 2ο

**Β1.** Να δώσετε τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας ω κάνοντας και το αντίστοιχο σχήμα.

**Β2.** Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα: $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

**Β3.** Να αντιστοιχίσετε τον κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α με το ίσο του της στήλης Β:

| Στήλη Α | Στήλη Β |
|---|---|
| **1.** $\eta\mu(140^\circ)$ | **α.** $\eta\mu(70^\circ)$ |
| **2.** $\sigma\upsilon\nu(140^\circ)$ | **β.** $1$ |
| **3.** $\varepsilon\varphi(140^\circ)$ | **γ.** $-\eta\mu(40^\circ)$ |
| **4.** $\eta\mu(90^\circ)$ | **δ.** $0$ |
| **5.** $\sigma\upsilon\nu(0^\circ)$ | **ε.** $\sigma\upsilon\nu(40^\circ)$ |
| **6.** $\varepsilon\varphi(60^\circ)$ | **στ.** $-\sigma\upsilon\nu 40^\circ$ |
| **7.** $\eta\mu(180^\circ)$ | **ζ.** $-1$ |

| | |
|---|---|
| **8.** $\sigma\upsilon\nu(90^\circ)$ | **η.** $\sqrt{3}$ |
| | **θ.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| | **ι.** $\eta\mu(40^\circ)$ |
| | **κ.** $-\varepsilon\varphi(40^\circ)$ |
| | **λ.** $\varepsilon\varphi(40^\circ)$ |

Μονάδες (2,2+2,2+2,2)=6,6

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

Δίνεται η κλασματική εξίσωση: $1-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{2x}{x^2-4} \quad :(1)$

**Α.** Να βρείτε τις τιμές του $x$ για τις οποίες ορίζεται η $(1)$.

**Β.** Να λύσετε την $(1)$.

Μονάδες (3+3,6)=6,6

### Άσκηση 2η

**Α.** Να γίνουν γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:

$$K = x^3 - 9x + x^2 - 9 \text{ και } \Lambda = x^2 - 3x$$

**Β.** Να απλοποιηθεί το κλάσμα: $\frac{K}{\Lambda}$

Μονάδες (3,6+3)=6,6

### Άσκηση 3η

**α.** Αν $90^\circ<\omega<180^\circ$ και $\eta\mu\omega=\frac{5}{13}$ να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\omega$ και $\varepsilon\varphi\omega$.

**β.** Αν $\eta\mu\omega=\frac{5}{13}$, $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{12}{13}$ και $\varepsilon\varphi\omega=-\frac{5}{12}$ να υπολογίσετε την παράσταση

$$\mathbf{A=\frac{13\eta\mu\left(180^\circ-\omega\right)+26\sigma\upsilon\nu(180^\circ-\omega)}{24\varepsilon\varphi(180^\circ-\omega)}}$$

Μονάδες (3,7+3)=6,7

9

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θέμα 1ο

Δίνεται η εξίσωση δευτέρου βαθμού $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0}$ $:(1)$, $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$.

**Α1.** Ποια παράσταση λέγεται διακρίνουσα και τι γνωρίζετε για το πλήθος των λύσεων της $(1)$, σε σχέση με τη διακρίνουσα;

**Α2.** Ποιες είναι οι λύσεις της $(1)$ σε κάθε μία από τις περιπτώσεις του ερωτήματος (α);

**Α3.** Να συμπληρώσετε στο γραπτό σας την παρακάτω πρόταση:
«Αν $\rho_1$, $\rho_2$ οι λύσεις της εξίσωσης $(1)$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο ..........................»

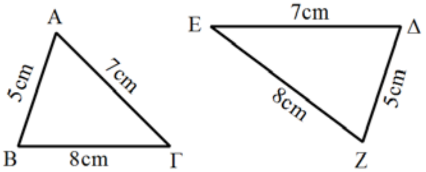
Μονάδες (2,2+2,2+2,2)=6,6

## Θέμα 2ο

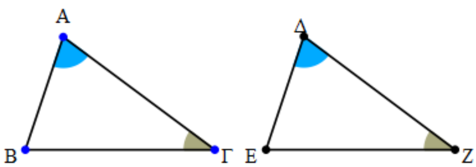
**Β1.** Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες

$\hat{A} = \ldots\ldots\ldots$, $\hat{B} = \ldots\ldots\ldots$

και $\hat{\Gamma} = \ldots\ldots\ldots$




**Β2.** Πότε δύο τρίγωνα είναι **όμοια**; Να γράψετε τους ίσους λόγους στα παρακάτω ζεύγη ομοίων τριγώνων.




**Β3.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

1. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε πάντα είναι ίσα.
2. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
3. Δύο όμοια τρίγωνα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.
4. Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντα όμοια.
5. Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν μια γωνία $40^{\circ}$, είναι πάντα όμοια.

Μονάδες (2,2+2,2+2,2)=6,6

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

**α.** Να λύσετε την εξίσωση $5x^2 - 7x - 6 = 0$

**β.** Αν το $συνω$ είναι λύση της προηγούμενης εξίσωσης να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $ω$.

**γ.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{5 \cdot ημ\left(180^\circ - ω\right) - 3 \cdot εφ\left(180^\circ - ω\right) + 10 \cdot συν\left(180^\circ - ω\right)}{2 \cdot ημ90^\circ \cdot συν180^\circ}$$

Μονάδες (2+2,6+2)=6,6

### Άσκηση 2η

**α.** Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2α - β = 3 \\ α + 3β = -2 \end{cases}$

**β.** Αν το ζεύγος $\left(α,β\right) = \left(1,-1\right)$ είναι η λύση του προηγούμενου συστήματος, να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα:

$P\left(x\right) = \left(2x-1\right)^2 - \left(x-2\right)\left(x+2\right) + 2\left(x-3\right)$ και $Q\left(x\right) = αx\left(2x+1\right) - βx\left(x-3\right) - 1$

είναι ίσα.

Μονάδες (3+3,6)=6,6

### Άσκηση 3η

**α.** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$3x^3 + 6x^2,\ x^2 - 9,\ 3x + 6 + x^2 + 2x,\ x^3 - 6x^2 + 9x$$

**β.** Να βρείτε τις τιμές του $x$ για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{3x^3 + 6x^2}{3x + 6 + x^2 + 2x},\quad B = \frac{x^2 - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x}$$

και να υπολογίσετε το γινόμενο $A \cdot B$

**γ.** Να λύσετε την εξίσωση $A \cdot B = \dfrac{3x^2}{x-3}$

Μονάδες (2+2+2,6)=6,6

10

**Θ Ε Ω Ρ Ι Α**

## Θέμα 1ο

**α.** Τι ονομάζουμε ταυτότητα;

**β.** Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

**γ.** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, αντιστοιχίζοντας κάθε παράσταση της στήλης Α, με το ανάπτυγμα της στην στήλη Β.

| Στήλη Α | Στήλη Β |
|---|---|
| **α.** $(\alpha-\beta)^3$ | **1.** $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ |
| **β.** $(\alpha+\beta)^2$ | **2.** $\alpha^2-\beta^2$ |
| **γ.** $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$ | **3.** $\alpha^3+3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2-\beta^3$ |
| **δ.** $(\alpha-\beta)^2$ | **4.** $\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2$ |
| | **5.** $\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ |
| | **6.** $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ |
| | **7.** $\alpha^2+\beta^2$ |

| α | β | γ | δ |
|---|---|---|---|
| | | | |

Μονάδες (2,2+2,2+2,2)=6,6

## Θέμα 2ο

**α.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**1.** Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

**2.** Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε πάντοτε είναι ίσα.

**3.** Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

**4.** Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι πάντα ίσα.

**5.** Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται πάντοτε ίσες γωνίες.

**β.** Να διατυπώσετε δύο από τα τρία κριτήρια ισότητας τυχαίων τριγώνων.

**γ.** Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

Μονάδες (2,2+2,2+2,2)=6,6

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

Αν για την αμβλεία γωνία $\omega$ ισχύει $\etaμ\omega = \frac{12}{13}$ τότε:

**α.** Να υπολογίσετε το $\sigmaυν\omega$ και την $\varepsilonφ\omega$.

**β.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left[13\sigmaυν\left(180^\circ - \omega\right) + 13\etaμ\left(180^\circ - \omega\right) - 5\varepsilonφ\left(180^\circ - \omega\right)\right] \cdot \sigmaυν120^\circ$$

Μονάδες (3,4+2,2)=6,6

### Άσκηση 2η

**α.** Κάνοντας τις απαιτούμενες πράξεις να δείξετε ότι το σύστημα:

$$\begin{cases} (y-x)^2 - x(x-3) = 2y(1-x) - (3+y)(3-y) \\ \dfrac{y+5}{4} - \dfrac{1-x}{2} = -x \end{cases}$$

παίρνει την απλούστερη μορφή: $\begin{cases} 3x - 2y = -9 \\ 6x + y = -3 \end{cases}$

**β.** Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 3x - 2y = -9 \\ 6x + y = -3 \end{cases}$

Μονάδες (3+3,6)=6,6

### Άσκηση 3η

**α.** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: $A = \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 4x + 3}$ και $B = -\dfrac{(1-2x)(x+1)}{1-x^2}$

**β.** και να δείξετε ότι $A + B = \dfrac{x^2}{x-1} + \dfrac{1-2x}{x-1}$

**γ.** Να λύσετε την εξίσωση: $A + B = 2$

Μονάδες (2+2+2,6)=6,6

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θέμα 1ο

**Α.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 = \alpha \ :(1)$.

Να αντιγράψετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα και να τον συμπληρώσετε:

| | |
|---|---|
| $\alpha > 0$ | η εξίσωση $(1)$ έχει δύο λύσεις τις $x = \ldots$ και $x = \ldots$ |
| $\alpha < 0$ | η εξίσωση $(1)$ ……………… |
| $\alpha = 0$ | η εξίσωση $(1)$ ……………… |

**Β.** Δίνεται η εξίσωση $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0}$ με $\alpha \neq 0$ (2).

**α. Σε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:**

**i.** ο τύπος που δίνει τη **διακρίνουσα** $\Delta$ της εξίσωσης (2) είναι ο εξής:

**1.** $\Delta = -\beta^2+4\alpha\gamma$ **2.** $\Delta = \beta^2+4\alpha\gamma$ **3.** $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma$ **4.** $\Delta = -\beta^2-4\alpha\gamma$

**ii.** αν $\boldsymbol{\Delta > 0}$ τότε η εξίσωση (2):

**1.** έχει δύο άνισες λύσεις **2.** έχει μία διπλή λύση

**3.** δεν έχει λύση **4.** έχει δύο λύσεις θετικές

**iii.** αν $\boldsymbol{\Delta = 0}$ τότε η εξίσωση (2):

**1.** έχει δύο άνισες λύσεις **2.** έχει μία διπλή λύση **3.** δεν έχει λύση

**4.** έχει μοναδική λύση την $x = 0$

**iv.** αν $\boldsymbol{\Delta < 0}$ τότε η εξίσωση (2):

**1.** έχει δύο άνισες λύσεις **2.** έχει μία διπλή λύση

**3.** δεν έχει λύση **4.** έχει δύο λύσεις αρνητικές

**β. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:**

**i.** αν η εξίσωση (2) έχει δύο άνισες λύσεις, αυτές δίνονται από τον τύπο ……………

**ii.** αν η εξίσωση (2) έχει μία διπλή λύση, αυτή δίνεται από τον τύπο …………..…

Μονάδες (2,6+4)=6,6

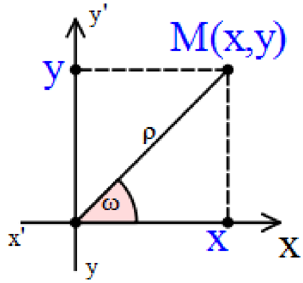
## Θέμα 2ο

Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος:

**α.** Να ορίσετε τα **ημω , συνω , εφω**

**β.** Να αποδείξετε ότι ισχύει $\boldsymbol{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1}$

**γ.** Να αποδείξετε ότι ισχύει $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}$




Μονάδες (2+3+1,6)=6,6

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

**α.** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

**i.** $x^2 - 2x$ και **ii.** $x^2 - 4$

**β.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**i.** $x^2 - 2x = 0$ **ii.** $x^2 - 4 = 0$ και **iii.** $x + 2 = 0$

**γ.** Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{x+8}{x^2-2x} - \dfrac{x+12}{x^2-4} = \dfrac{1}{x+2}$

Μονάδες (2+2+2,6)=6,6

### Άσκηση 2η

**α.** Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$

**β.** Αν οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x - 2y = 4$, $\varepsilon_2 : x + y = 3$ και $\varepsilon_3 : 2x + \kappa y = 7$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, να βρείτε το $\kappa$.

Μονάδες (3+3,6)=6,6

### Άσκηση 3η

Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \dfrac{12}{13}$ τότε:

**α.** Να υπολογίσετε το **συνω** και την **εφω**.

**β.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = [13\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) + 13\eta\mu(180^\circ - \omega) - 5\varepsilon\varphi(180^\circ - \omega)] \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ$$

Μονάδες (3.7+3)=6,7

**ΘΕΩΡΙΑ**

### Θέμα 1ο

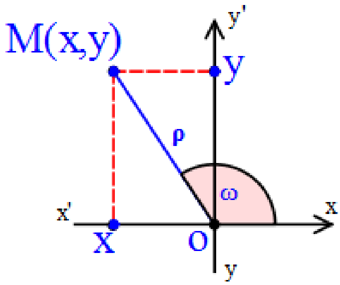
**Α.** Τι ονομάζουμε **μονώνυμο**; Ποια μονώνυμα λέγονται **όμοια**; Ποια μονώνυμα λέγονται **αντίθετα**;

**Β.** Τι είναι **βαθμός** μονωνύμου ως προς μια μεταβλητή;
Ποιος είναι ο **βαθμός** του **σταθερού** και **μη μηδενικού** μονωνύμου;

Μονάδες (3,3+3,3)=6,6

### Θέμα 2ο

**Α.** Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $\mathbf{Oxy}$ έχουμε τοποθετήσει μια αμβλεία γωνία $\boldsymbol{\omega}$ έτσι ώστε η κορυφή της να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων, η μια πλευρά της να συμπίπτει με τον θετικό ημιάξονα $\mathbf{Ox}$ και η άλλη η πλευρά της βρίσκεται στο $2^o$ τεταρτημόριο. Στη πλευρά αυτή έχουμε πάρει ένα σημείο $\mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, διαφορετικό από το $\mathbf{O}$, που απέχει από το $\mathbf{O}$ απόσταση $\mathbf{OM}=\boldsymbol{\rho}$. Να δώσετε τους ορισμούς του ημιτόνου, του συνημιτόνου και της εφαπτομένης της γωνίας $\boldsymbol{\omega}$




**Β.** Να αποδείξετε την ισότητα: $\mathbf{\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1}$.

Μονάδες (3,3+3,3)=6,6

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$A(x) = (x+2)^2 - 9x$$

$$B(x) = x(x-1) - x^2 + 4$$

$$\Gamma(x) = (x-3)(x+3) - x(x-3) + 8$$

**α.** Να βγάλετε τις παρενθέσεις και στα τρία πολυώνυμα και να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων.

**β.** Να αποδείξετε ότι: $A(x) + B(x)\Gamma(x) = -2x^2 + 8x$

**γ.** Να λυθεί η εξίσωση: $A(x) + B(x)\Gamma(x) = 0$

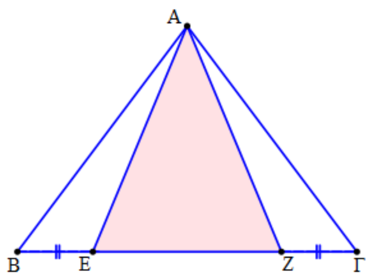
Μονάδες (2+2+2,6)=6,6

### Άσκηση 2η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο **ΑΒΓ** (**ΑΒ = ΑΓ**) και στις προεκτάσεις της πλευράς **ΒΓ** παίρνουμε τα σημεία **Ε, Ζ** έτσι ώστε να ισχύει **ΒΕ = ΓΖ**. Να αποδείξετε ότι:

**α.** τα τρίγωνα **ΑΕΒ** και **ΑΓΖ** είναι ίσα

**β.** το τρίγωνο **ΑΕΖ** είναι ισοσκελές.




Μονάδες (3,3+3,3)=6,6

### Άσκηση 3η

Οι πλευρές τριγώνου ΚΛΜ έχουν μήκη

$$K\Lambda = \sqrt{16} + 2\sqrt{25} + \sqrt{49} - \sqrt{(-1)^{2016}}, \ \mathbf{\Lambda M = 24 \text{ και }} KM = \sqrt{64} + 2\sqrt{36}$$

**α.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι **ισοσκελές** με βάση ΛΜ.

**β.** Να υπολογίσετε το ύψος ΚΡ.

**γ.** Να βρεθεί το **εμβαδό** του τριγώνου ΚΛΜ.

**δ.** Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\widehat{M}$.

Μονάδες (1,6+1,6+1+2,4)=6,6

13

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θέμα 1ο

**A1. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε την παρακάτω πρόταση**:
Η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε μια αλγεβρική παράσταση από μορφή αθροίσματος σε μορφή γινομένου λέγεται……………………..…..

**A2. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες:**

1. $(\alpha-\beta)^2=$......................  2. $(\alpha+\beta)^3=$............................

**A3. Να αποδείξετε την παρακάτω ταυτότητα ξεκινώντας από το πρώτο μέλος και χρησιμοποιώντας την «διπλή» επιμεριστική ιδιότητα**: $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$

Μονάδες (1+3,6+2)=6,7

## Θέμα 2ο

**B1.** *Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις διατυπώνοντας ένα από τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και ένα από τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (όποια θέλετε) αφού τις μεταφέρετε στην κόλλα σας:*

Αν δύο τρίγωνα έχουν ……………………….., τότε είναι ίσα.

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν …………….. .

**B2.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

1. Όλα τα τετράγωνα είναι όμοια.
2. Όλα τα ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια.
3. Δύο τρίγωνα που είναι όμοια είναι πάντοτε και ίσα.
4. Δύο τρίγωνα που έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι όμοια.

Μονάδες (4,2+2,4)=6,6

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

Δίνεται η εξίσωση: $5x(x-1)=2(1-x)$

**α.** Να φέρετε την παραπάνω εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

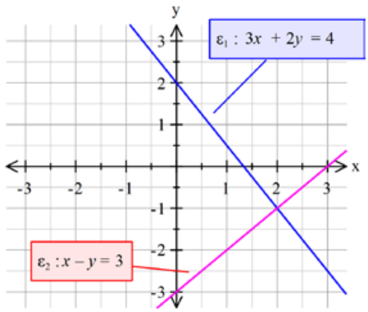
**β.** Να βρείτε τους συντελεστές της $\alpha,\beta,\gamma$ και τη διακρίνουσά της $\Delta$.

**γ.** Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $5x^2-3x-2=0$.

Μονάδες (1+2,6+3)=6,6

### Άσκηση 2η

Στο διπλανό σχήμα παριστάνονται στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων οι ευθείες με εξισώσεις: $\varepsilon_1: 3x+2y=4$ και $\varepsilon_2: x-y=3$.




**Α.** Χρησιμοποιώντας το σχήμα να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις συμπληρώνοντας τα κενά και μεταφέροντάς τις στην κόλλα σας.

**1.** Το γραμμικό σύστημα: $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ x-y=3 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση την …………

**2.** Η ευθεία $\varepsilon_1: 3x+2y=4$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο ……….

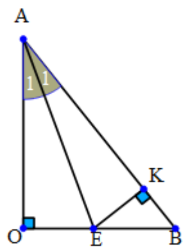
**3.** Η ευθεία $\varepsilon_2: x-y=3$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο ………….

**Β.** Να λύσετε αλγεβρικά με όποια μέθοδο θέλετε το σύστημα $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ x-y=3 \end{cases}$ και να επαληθεύσετε τη λύση του από το σχήμα.

Μονάδες (3+3,6)=6,6

### Άσκηση 3η

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ με $\widehat{O}=90^o$ φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΕ και την ΕΚ κάθετη στην ΑΒ.




**α.** Να μεταφέρετε με ακρίβεια το σχήμα στην κόλλα σας

**β.** Συγκρίνοντας τα κατάλληλα τρίγωνα να αποδείξετε ότι $AO=AK$

**γ.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΒΕΚ είναι όμοια.

Μονάδες (2+3+1,6)=6,6

14

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θέμα 1ο

**Α1.** Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

**Α2.** *Να γράψετε στην κόλλα σας το γράμμα της κάθε ερώτησης και δίπλα τον αριθμό που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση για τις παρακάτω προτάσεις:*

α. Ο **βαθμός** ενός σταθερού και μη μηδενικού πολυωνύμου είναι:

**1.** 0 **2.** 1 **3.** Δεν έχει βαθμό

β. Έστω ένα πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο έχει βαθμό $3$ ως προς $x$ και ένα άλλο πολυώνυμο $Q(x)$ το οποίο έχει βαθμό $2$ ως προς $x$, τότε το γινόμενό τους $P(x)Q(x)$ θα έχει ως προς $x$ βαθμό:

**1.** 5 **2.** 6 **3.** Δεν γνωρίζουμε

γ. Η ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της λέγεται:

**1.** Εξίσωση **2.** Πολυώνυμο **3.** Ταυτότητα

Μονάδες (3+3,6)=6,6

## Θέμα 2ο

**Β1.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α.** Για κάθε γωνία $\omega$ ισχύει $-1\le\eta\mu\omega\le1$.

**β.** Η εφαπτομένη οποιασδήποτε γωνίας τριγώνου είναι θετικός αριθμός.

**γ.** Ισχύει $\sigma\upsilon\nu110^\circ=-\sigma\upsilon\nu70^\circ$

**δ.** Για κάθε γωνία $\omega$ με $\eta\mu\omega\neq0$ ισχύει $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

**Β2.** Θεωρώντας οποιαδήποτε οξεία γωνία $\omega$ να αποδείξετε την βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$.

Μονάδες (2,6+4)=6,6

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

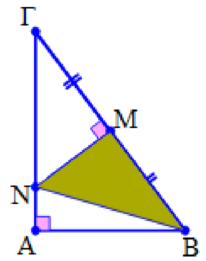
### Άσκηση 1η

Να λυθεί το σύστημα $\Sigma:\begin{cases} x-y=3 \\ x+\dfrac{y-1}{2}=4 \end{cases}$

Μονάδες 6,6

### Άσκηση 2η

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ το $M$ είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και η $MN$ είναι μεσοκάθετος της $B\Gamma$.




**α.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Gamma NM$ και $BNM$ είναι ίσα.

**β.** **i.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $NMB$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.

**ii.** Να γράψετε τους λόγους της παραπάνω ομοιότητας.

Μονάδες (3+3,6)=6,6

### Άσκηση 3η

Δίνεται η παράσταση: $A=(2x-3)^2-(x-2)^2-(x-1)(x+1)$.

**α.** Να αποδείξετε ότι: $A-6=2x^2-8x$

**β.** Να λύσετε την εξίσωση: $A=0$

**γ.** Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\dfrac{A-6}{x^2-16}$

Μονάδες (2+2+2,6)=6,6

15

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θ έ μ α 1 ο

**α.** Ποια μονώνυμα λέγονται α ν τ ί θ ε τ α; Γράψτε ένα παράδειγμα δύο αντίθετων μονωνύμων.

**β.** Ποια αλγεβρική παράσταση λέγεται π ο λ υ ώ ν υ μ ο; Από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις να βρείτε αυτές που είναι πολυώνυμα:

**1.** $4x^3-5x^2+2x-\dfrac{1}{x}$ **2.** $\sqrt{2}x^2y-5xy+y^2+\dfrac{1}{3}$

**3.** $3x^4-5x^2-12$ **4.** $x^3+2x^2y-\sqrt{x}y^2+3y^3$

**γ.** Τι λέγεται τ α υ τ ό τ η τ α; Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες:

**1.** $(\alpha-\beta)^2=$..............................

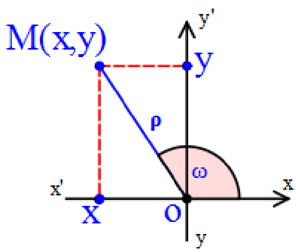
**2.** $(\alpha-\beta)^3=$...............................

**3.** $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=$.......................

Μ ο ν ά δ ε ς (1 + 2 + 3 , 6 ) = 6 , 6

## Θ έ μ α 2 ο

**α.** Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος




να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$

**β.** Να μεταφέρετε συμπληρωμένες στο γραπτό σας τις παρακάτω προτάσεις:

**1.** $\sigma\upsilon\nu 0^\circ=$...................., $\eta\mu 180^\circ=$.....................

**2.** Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και $180^\circ-\omega$ ισχύουν:

$\eta\mu(180^\circ-\omega)=$.................., $\sigma\upsilon\nu(180^\circ-\omega)=$...................

**3.** Αν για τη γωνία ω ισχύει $0\le\omega\le180^\circ$ και

- $\eta\mu\omega=\eta\mu 60^\circ$ τότε $\omega=$.....
- $\sigma\upsilon\nu\omega=-\sigma\upsilon\nu 20^\circ$ τότε $\omega=$.....

Μ ο ν ά δ ε ς ( 3 , 6 + 3 ) = 6 , 6

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## Άσκηση 1η

Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + x - 1 = 0$ και το κλάσμα $K = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

**α.** Να λύσετε την εξίσωση και να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 + x - 1$.

**β.** Να απλοποιήσετε το κλάσμα $K$.

**γ.** Να κάνετε τις πράξεις: $\left(\frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} : \frac{2x}{3x - 3}\right) + \frac{3}{2x}$

Μονάδες (2,2+2,2+2,2)=6,6

## Άσκηση 2η

Θεωρούμε τις παραστάσεις:

$$A = (x - 3y)^2 + (2y + 3x)(3x - 2y) - (3x - y)^2 \text{ και } B = 2x - y - x^2 - 4y^2$$

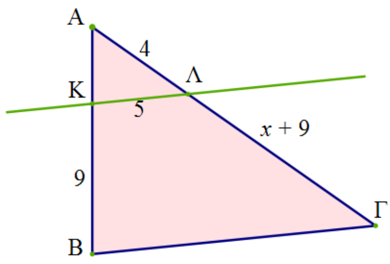
**α.** Να αποδείξετε ότι: $A + B = 2x - y$

**β.** Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} A + B = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

Μονάδες (3+3,6)=6,6

## Άσκηση 3η

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $K\Lambda$ παράλληλη προς την $B\Gamma$, $AK = x\,cm$, $A\Lambda = 4cm$, $K\Lambda = 5cm$, $KB = 9cm$, $\Lambda\Gamma = (x + 9)cm$ και $B\Gamma = (y + 13)cm$.




**α.** Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AK\Lambda$ είναι όμοια.

**β.** Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $x$ και $y$.

Μονάδες (4,6+2)=6,6

16

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θέμα 1ο

**A1.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε την παρακάτω πρόταση:

Η μετατροπή μιας παράστασης από άθροισμα σε ……………… λέγεται ……………………

**A2.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες:

1. $(\alpha-\beta)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **2.** $(\alpha+\beta)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

**A3.** Να αποδείξετε την παρακάτω ταυτότητα: $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$

Μονάδες (1+2,6+3)=6,6

## Θέμα 2ο

Γενικά ισχύει ότι «αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες είναι ίσα».

**B1.** Για να αποδείξουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, είναι απαραίτητο να αποδείξουμε ότι έχουν όλες τις πλευρές τους και τι αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία; Πώς ονομάζονται οι προτάσεις που μας βοηθούν να διακρίνουμε αν δύο τρίγωνα είναι ίσα συγκρίνοντας λιγότερα στοιχεία;

**B2.** Να διατυπώσετε ένα από τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και ένα από τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

**B3.** Να συμπληρώσετε την παρακάτω πρόταση:

Αν από …………………… μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία …………………… προς μία άλλη πλευρά του, τότε ……………………………

Μονάδες (2,2+2,2+2,2)=6,6

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

Δίνεται η εξίσωση: $x-2=3x(2-x)$

**α.** Αφού φέρετε την παραπάνω εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, να βρείτε τους συντελεστές της $\alpha,\beta,\gamma$ και την διακρίνουσά της $\Delta$.

**β.** Να λύσετε την εξίσωση $3x^2-5x-2=0$
και να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2-5x-2$.

Μονάδες (3+3,6)=6,6

### Άσκηση 2η

**α.** Δίνεται ότι: $(\alpha+\beta)^3=\alpha^{\kappa^2-5\kappa+3}+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^{\lambda^2-6}$.
Να βρεθεί το ζεύγος των λύσεων $(\kappa,\lambda)$ αν γνωρίζετε ότι $\kappa,\lambda>0$.

**β.** Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x^2-7}{x^2-1}=\dfrac{2}{x-1}$.

Μονάδες (3,6+3)=6,6

### Άσκηση 3η

**Α.** Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta EZ$.
Αν $\widehat{A}=50^o$, $\widehat{B}=80^{o\,\circ}$, $\widehat{\Delta}=50^o$ και $\widehat{Z}=80^o$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta EZ$ είναι όμοια, και να γράψετε τους ίσους λόγους των πλευρών, αν είναι γνωστό ότι $A\Gamma=10cm$, $\Delta E=5cm$, $B\Gamma=(\alpha+\beta+3)cm$ και
$EZ=(2\alpha+3\beta-5)cm$.

**Β.** αν επιπλέον η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x)=x^2-3x+3\alpha-2\beta$ στο 1 είναι $-3$, να βρεθούν τα $\alpha,\beta$.

Μονάδες (2+2+2,6)=6,6

**Θ Ε Ω Ρ Ι Α**

## Θέμα 1ο

**Α1.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

1. Αν $\alpha$ και $\beta$ είναι θετικοί αριθμοί, τότε $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta}$.
2. Δύο μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος λέγονται όμοια.
3. Το πηλίκο δύο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.
4. Ο αριθμός $0$ λέγεται μηδενικό μονώνυμο.
5. Το μηδενικό μονώνυμο δεν έχει βαθμό.

**Α2.** *Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τις παρακάτω ισότητες συμπληρώνοντας τα κενά, ώστε οι ισότητες που θα προκύψουν να εκφράζουν αξιοσημείωτες ταυτότητες:*

1. $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=$ ....................................
2. $(\alpha+\beta)^3=$ ........... $+3\alpha^2\beta+$ ................ $+\beta^3$
3. $(\alpha+$ ..........$)^2=\alpha^2+$ ............ $+\beta^2$
4. $\alpha^2-$ ............ $=(\alpha+\beta)(\alpha-$ .........$)$

**Α3.** Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Μονάδες (3,3+3,3)=6,6

## Θέμα 2ο

**Β1.** Να αναφέρετε τα δύο κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

**Β2.** Αν οι ευθείες $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ είναι παράλληλες και οι ευθείες $\delta$ και $\zeta$ τις τέμνουν στα σημεία $Α, Β, Γ$ και $Α', Β', Γ'$ αντίστοιχα ώστε $ΑΒ = ΒΓ$ τότε $Α'Β' = Β'Γ'$. Να γίνει το σχήμα και να γράψετε στην κόλλα σας αν αυτό είναι σωστό ή λάθος.

**Β3.** Να διατυπώσετε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων και να κατασκευάσετε και στις τρεις περιπτώσεις τα αντίστοιχα σχήματα στα οποία να φαίνονται τα κριτήρια που περιγράφετε.

Μονάδες (2,2+2,2+2,2)=6,6

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

Δίνονται οι παραστάσεις

$$A=(x+2)^2-4(x+5) \quad \text{και} \quad B=\frac{x^2+x}{x^2-1}:\frac{1}{6x-6} \text{ με } x\neq 1,\ x\neq -1$$

**α.** Να αποδείξετε ότι $A=x^2-16$.

**β.** Να αποδείξετε ότι $B=6x$.

**γ.** Να βρείτε για ποιες τιμές του $x$ ισχύει: $A+B=0$

Μονάδες (2+2+2,6)=6,6

### Άσκηση 2η

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{2x-y}{3}=x-\dfrac{5}{6} \\ 2(x-y)+3(y+2x)=9 \end{cases}$

**α.** Να αποδείξετε ότι το σύστημα μετά από πράξεις παίρνει τη μορφή: $\begin{cases} 17x-7y=10 \\ 8x+y=9 \end{cases}$

**β.** Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

Μονάδες (3+3,6)=6,6

### Άσκηση 3η

Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A}=90^\circ$) και $A\Delta$ είναι ύψος του.

**α.** Αφού αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι όμοια να συμπληρώσετε τα κενά στην παρακάτω ισότητα που προκύπτει από την ομοιότητα: $\dfrac{AB}{\ldots\ldots\ldots}=\dfrac{B\Delta}{\ldots\ldots\ldots}$

**β.** Αν $AB=\sqrt{3}$, $B\Gamma=x$, και $B\Delta=x-2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\sqrt{3}}{x}=\dfrac{x-2}{\sqrt{3}}$

ii. Να υπολογίσετε το $x$ που είναι το μήκος της $B\Gamma$.

**γ.** Αν $AB=\sqrt{3}$ και $B\Gamma=3$, τότε να υπολογίσετε τον αριθμό $\text{συν}(180^\circ-B)$

Μονάδες (2+2,6+2)=6,6

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θέμα 1ο

**Α1.** Τι ονομάζεται μονώνυμο, τι ονομάζεται συντελεστής μονωνύμου και τι κύριο μέρος μονωνύμου;

**Α2.** Να αντιγράψετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις, ώστε να προκύψουν γνωστές ταυτότητες:

**i.** $(\alpha+\beta)^2 =$ ...............................

**ii.** $(\alpha-\beta)^2 =$ ................................

**iii.** $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) =$ ................................

**iv.** $(\alpha+\beta)^3 =$ .................................

**v.** $(\alpha-\beta)^3 =$ ........................................

**Α3.** Να αποδείξετε ότι: $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Μονάδες (2,2+2,2+2,2)=6,6

## Θέμα 2ο

**Β1.** Να δώσετε τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας ω κάνοντας και το αντίστοιχο σχήμα.

**Β2.** Για οποιαδήποτε γωνία $\omega$ να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

**Β3.** Για οποιαδήποτε γωνία $\omega$ να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

Μονάδες (1+2+3,6)=6,6

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## Άσκηση 1η

Να λύσετε την παρακάτω κλασματική εξίσωση: $\frac{x-1}{2x+2}=\frac{4}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}$

Μονάδες 6,6

## Άσκηση 2η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και $BE$, $\Gamma Z$ οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Αν $M$ είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

**α.** Τα τμήματα $BZ$ και $\Gamma E$ είναι ίσα.

**β.** Το τρίγωνο $AMZ$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες (3+3,6)=6,6

## Άσκηση 3η

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \frac{x+1}{2}-\frac{y+2x+2}{4}=\frac{2-x}{5} \\ \frac{x-1}{3}=\frac{3x+2y}{5}-\frac{11+x}{15} \end{cases}$

**α.** Να αποδείξετε ότι το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{cases} 4x-5y=8 \\ -3x-6y=-6 \end{cases}$$

**β.** Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

**γ.** Να επαληθεύσετε τη λύση που βρήκατε.

Μονάδες (2+3,6+1)=6,6

19

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θέμα 1ο

**Α1.** Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

**Α2.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α.** Για οποιουσδήποτε αριθμούς α και β ισχύει: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$

**β.** Αν $\rho_1,\rho_2$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$

**γ.** Αν η διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$, είναι μη αρνητική, τότε η παραπάνω εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση.

**δ.** Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους $x,y$ είναι αδύνατο, τότε οι ευθείες που παριστάνουν οι δύο εξισώσεις είναι παράλληλες.

Μονάδες (2,6+4)=6,6

## Θέμα 2ο

**Β1.** Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει: $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$

**Β2.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α.** Για δύο παραπληρωματικές γωνίες $\omega$ και $180^\circ-\omega$ ισχύει:

$$\eta\mu(180^\circ-\omega)=-\eta\mu\omega$$

**β.** Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.

**γ.** Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ισούται με το μισό της.

**δ.** Αν $\omega$ είναι μια αμβλεία γωνία, τότε $\sigma\upsilon\nu\omega<0$.

**ε.** Τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες, αν τέμνονται από άλλη ευθεία σε μέρη ίσα ,τότε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει, τις τέμνει σε μέρη ίσα.

Μονάδες (1,6+5)=6,6

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## Άσκηση 1η

Αν για την αμβλεία γωνία $\omega$ ισχύει: $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$, να αποδείξετε ότι:

**α.** $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$

**β.** $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{4}{3}$

**γ.** $A = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega - \sigma\upsilon\nu 120^\circ}{\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi 135^\circ} = \frac{3}{70}$

Μονάδες (2+2+2,6)=6,6

## Άσκηση 2η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διάμεσοί του $B\Delta$ και $\Gamma E$. Αν $K$ είναι το σημείο τομής των διαμέσων, τότε να αποδείξετε:

**α.** Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

**β.** Το τρίγωνο $B\Gamma K$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες (3,3+3,3)=6,6

## Άσκηση 3η

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$A(x) = 2x(3x-1) - (x-1)(1+x) - 3x^2 - 1$ και $B(x) = (3x-2)^2 - (2x-1)(4x-3)$

**α.** Να δείξετε ότι: $A(x) = 2x^2 - 2x$ και $B(x) = x^2 - 2x + 1$

**β.** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις $A(x)$ και $B(x)$.

**γ.** Να βρείτε τις τιμές του $x$ όπου ορίζεται η αλγεβρική παράσταση $\Gamma(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ και μετά να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση $\Gamma(x)$.

**δ.** Να λύσετε την εξίσωση $\Gamma(x) = \frac{2}{x-1}$

Μονάδες (1,5+2+1,5+1,6)=6,6

**20**

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θέμα 1ο

**Α1.** Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

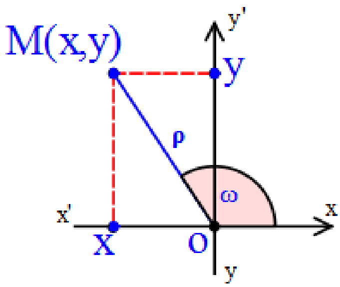
**Α2.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

1. Το διπλάσιο του $\sqrt{6}$ είναι το $\sqrt{24}$
2. Το μηδενικό μονώνυμο έχει βαθμό $0$.
3. Το πηλίκο δύο μονώνυμων είναι πάντα μονώνυμο.
4. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει βαθμό $3$ και το $Q(x)$ έχει βαθμό $2$, τότε το $P(x)Q(x)$ έχει βαθμό $5$.

Μονάδες (2,6+4)=6,6

## Θέμα 2ο

**Β1.** Στο διπλανό σχήμα είναι: $x\hat{O}M=\omega$.
Να αποδείξετε την ταυτότητα:
$$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1.$$




**Β2.** Αντιστοιχίστε τα στοιχεία της Στήλης Ι με τα στοιχεία της Στήλης ΙΙ.

| | |
|---|---|
| 1. $\sigma\upsilon\nu 180^\circ$ | α. $0$ |
| 2. $\eta\mu 90^\circ$ | β. $-1$ |
| 3. $\varepsilon\varphi 180^\circ$ | γ. $1$ |

Μονάδες (4,8+1,8)=6,6

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## Άσκηση 1η

**α.** Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = x^2 - 4 \text{ και } B = 3x^2 - 6$$

**β.** Να λυθεί η εξίσωση: $2A - 3B + x^2 + 7x - 11 = 0$ (όπου $A$ και $B$ οι παραστάσεις του (α) ερωτήματος).

Μονάδες (2+4,6)=6,6

## Άσκηση 2η

Δίνεται η συνάρτηση: $y = -x^2 + \kappa x + \lambda$

**α.** Να βρείτε τους αριθμούς $\kappa, \lambda$ ώστε η τιμή της συνάρτησης για $x = -2$ να είναι $9$ και το τριώνυμο $-x^2 + \kappa x + \lambda$ να έχει διακρίνουσα $\Delta = 36$.

**β.** Αν $\kappa = -4$ και $\lambda = 5$ να βρείτε: τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της παραβολής με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες (3+3,6)=6,6

## Άσκηση 3η

Αν $90^\circ < \omega < 180^\circ$ και $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$ να υπολογιστούν:

**α.** Τα $\sigma\upsilon\nu\omega$ και $\varepsilon\varphi\omega$

**β.** Για τις τιμές που βρήκατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$L = \frac{5}{17}\left(2\eta\mu\omega - 3\sigma\upsilon\nu\omega\right) - \frac{3}{4}\varepsilon\varphi\omega$$

Μονάδες (4,6+2)=6,6

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θέμα 1ο

**α.** Τι ονομάζουμε μονώνυμο, ποια τα μέρη του και πώς ονομάζονται;

**β.** Πότε δύο μονώνυμα λέγονται όμοια και πότε αντίθετα; Δώστε από ένα παράδειγμα.

**γ.** Να υπολογίσετε τα $\lambda,\mu,\nu$ ώστε τα μονώνυμα $(2\lambda+1)x^{\mu-1}y^2$ και $-5x^2y^{\nu+2}$ να είναι ίσα.

**δ.** Να γίνει αντιστοίχιση των παραστάσεων του πίνακα 1 με τις ίσες παραστάσεις του πίνακα 2.

| Πίνακας 1 | Πίνακας 2 |
|---|---|
| 1. $(\alpha+\beta)^2$ | Α. $\alpha^2-\beta^2$ |
| 2. $(\alpha-\beta)^2$ | Β. $\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ |
| 3. $(\alpha+\beta)^3$ | Γ. $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ |
| 4. $(\alpha-\beta)^3$ | Δ. $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ |
| 5. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ | Ε. $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ |
| | |
| | |

Μονάδες (1,7+1,7+1,7+1,7)=6,8

## Θέμα 2ο

**α.** Να αποδειχθεί ότι για οποιαδήποτε γωνία $\omega$ ισχύει: $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$

**β.** Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία $\omega$ για την οποία να ισχύει:

$$\eta\mu\omega=\frac{1}{2} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\omega=\frac{1}{3}$$

**γ.** Να συμπληρωθούν οι:

$\eta\mu(180^\circ-\omega)=\ldots\ldots\ldots$ $\sigma\upsilon\nu(180^\circ-\omega)=\ldots\ldots\ldots$ $\varepsilon\varphi\omega(180^\circ-\omega)=\ldots\ldots\ldots$ $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

Μονάδες (2,2+2,2+2,2)=6,6

# Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

## Άσκηση 1η

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-2x-4}$ και $B=\dfrac{6x^3}{x^5-x^3}$

**α.** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις $A, B$.

**β.** Αν $A=\dfrac{x-2}{2(x+1)}$ και $B=\dfrac{6}{x^2-1}$ να λύσετε την εξίσωση: $A=\dfrac{3}{1-x}+B$

Μονάδες (3+3,6)=6,6

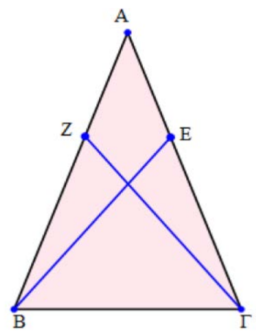
## Άσκηση 2η

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=-2 \\ \dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{y+5}{4}=1 \end{cases}$

Μονάδες 6,6

## Άσκηση 3η

Δίνεται ισοσκελές τ ρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB=A\Gamma$.
Πάνω στην πλευρά $AB$ θεωρούμε σημείο $Z$ και πάνω στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο $H$, έτσι ώστε να είναι $AZ=AH$.




**α.** Να αποδείξετε ότι: $B\widehat{Z}\Gamma=\Gamma\widehat{H}B$.

**β.** Αν $B\widehat{Z}\Gamma=\varphi$, $A\widehat{H}B=\omega$ και ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{3}{5}$ τότε να υπολογίσετε:

**i.** Το $\sigma\upsilon\nu\omega$.

**ii.** Το $\eta\mu\omega$ και την $\varepsilon\varphi\omega$.

Μονάδες [3,5+(1+2,2)]=6,7

22

**ΘΕΩΡΙΑ**

### Θέμα 1ο

**α.** Πότε μια ακέραια αλγεβρική παράσταση λέγεται μονώνυμο; (παράδειγμα)

**β.** Ποια μονώνυμα λέγονται όμοια; (παράδειγμα)

**γ.** Ποια μονώνυμα λέγονται ίσα και ποια αντίθετα;

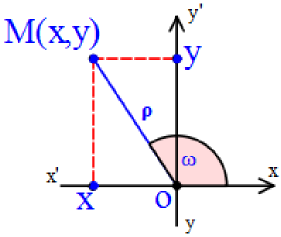
**δ.** Τι είναι βαθμός μονωνύμου ως προς μια μεταβλητή;

**ε.** Ποιος είναι ο βαθμός του σταθερού και μη μηδενικού μονωνύμου;

Μονάδες (1,3+1,3+1,3+1,3+1,3)=6,5

### Θέμα 2ο

**α.** Για τη γωνία $x\hat{O}M=\hat{\omega}$ του παρακάτω σχήματος με $OM=\rho$ να συμπληρώσετε τις σχέσεις:




i. $\eta\mu\omega=\dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$ ii. $\sigma\upsilon\nu\omega=\dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$ iii. $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$

**β.** Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

**γ.** Να συμπληρώσετε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας ω, όταν η ω είναι οξεία και όταν είναι αμβλεία.

| | ημω | συνω | εφω |
|---|---|---|---|
| ω οξεία | | | |
| ω αμβλεία | | | |

Μονάδες (2,2+2,2+2,2)=6,6

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = 2 - \dfrac{x-y}{3} \\ \dfrac{x+y}{3} - \dfrac{x-y}{12} = 5 \end{cases}$

Μονάδες 6,6

### Άσκηση 2η

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x(x+3)^2 - (3x-1)(3x+1) - (19x-23)$

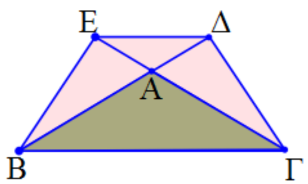
**α.** Να δείξετε ότι: $P(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

**β.** Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\dfrac{P(x)}{2x^3 + 2x^2 - 12x}$

Μονάδες (3+3,6)=6,6

### Άσκηση 3η

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ( $AB = A\Gamma$ ) του διπλανού σχήματος. Στις προεκτάσεις των ΑΒ και ΑΓ προς το Α παίρνουμε τμήματα ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα έτσι ώστε $A\Delta = AE$ . Να αποδείξετε ότι:




**α.** $EB = \Delta\Gamma$

**β.** $E\widehat{B}\Gamma = B\widehat{\Gamma}\Delta$

**γ.** $B\widehat{E}\Delta = \Gamma\widehat{\Delta}E$

Μονάδες 6,6

23

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θέμα 1ο

**A1.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τις παρακάτω ισότητες, συμπληρώνοντας τα κενά, ώστε οι ισότητες που θα προκύψουν, να εκφράζουν αξιοσημείωτες ταυτότητες:

**α.** $(\alpha+\beta)^2 = ..........$ **β.** $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = ...........$

**γ.** $(\alpha-\beta)^3 = ..........$

**A2.** Να αποδείξετε στην κόλλα σας την παρακάτω ταυτότητα ξεκινώντας από το πρώτο μέλος και χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα:

$$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

**A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.**

**α.** Δύο αντίθετα μονώνυμα είναι όμοια.

**β.** Αν τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ έχουν ίδιο βαθμό, τότε είναι πάντα ίσα.

**γ.** Ο αριθμός $-3$ είναι πολυώνυμο βαθμού $0$.

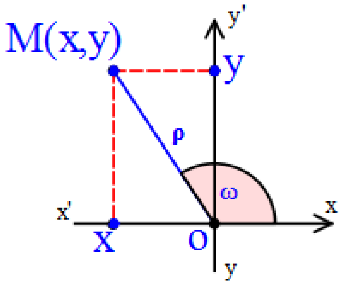
Μονάδες (3+2,4+1,2)=6,6

## Θέμα 2ο

**B1.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τις παρακάτω ισότητες, συμπληρώνοντας κατάλληλα τα κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

$$\eta\mu\omega = \frac{....}{....},\quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{....}{....},$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{....}{....},\qquad \rho = ....$$




**B2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.**

**α.** Όταν $0^\circ \le \omega \le 180^\circ$, τότε $0 \le \sigma\upsilon\nu\omega \le 1$.

**β.** Όταν η γωνία $\omega$ είναι αμβλεία, τότε $\eta\mu\omega > 0$.

γ. Η $εφ90^o$ δεν ορίζεται.

**Β3.** Να συμπληρώσετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του από τη στήλη Β:

| Στήλη Α | Στήλη Β |
|---|---|
| α. $ημ\left(180^o - ω\right)$ | 1. $-1$ |
| β. $συν\left(180^o - ω\right)$ | 2. $0$ |
| γ. $εφ0^o$ | 3. $-ημω$ |
| δ. $ημ90^o$ | 4. $συνω$ |
| ε. $συν180^o$ | 5. δεν ορίζεται |
| | 6. $-συνω$ |
| | 7. $ημω$ |
| | 8. $1$ |

| α | β | γ | δ | ε |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

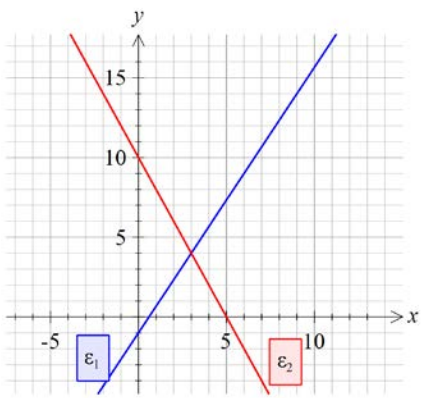
Μονάδες (2,2+2,4+2)=6,6

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

Στο διπλανό σχήμα παριστάνονται στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων οι ευθείες με εξισώσεις:

$5x - 3y = 3$ και $2x + y = 10$.




α. Να βρεθεί ποια εξίσωση αντιστοιχεί στην $ε_1$ και ποια στην $ε_2$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να προσδιορίσετε αλγεβρικά

- σε ποιο σημείο τέμνει η $ε_1$ τον άξονα $x'x$.
- σε ποιο σημείο τέμνει η $ε_2$ τον άξονα $y'y$.

**γ.** Το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 5x-3y=3 \\ 2x+y=10 \end{cases}$ έχει λύση; Γιατί; Να την προσδιορίσετε γραφικά από το σχήμα.

**δ.** Να λύσετε αλγεβρικά με όποια μέθοδο θέλετε το παραπάνω σύστημα.

Μονάδες (1+2+1+2,6)=6,6

## Άσκηση 2η

Δίνεται η αλγεβρική παράσταση:

$$A=\frac{2x^2+x-1}{x^2+2x+1}+\frac{3x+9}{x(1-x)+3(1-x)}$$

**α.** Να λυθεί η εξίσωση: $2x^2+x-1=0$ και με τη βοήθεια των λύσεων να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο $2x^2+x-1$.

**β.** Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$3x+9,\ x^2+2x+1 \text{ και } x(1-x)-x+3(1-x).$$

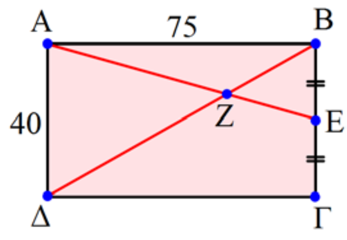
**γ.** Με τη βοήθεια των παραγοντοποιήσεων που βρήκατε στα ερωτήματα α) και β), και κάνοντας τις απαραίτητες απλοποιήσεις, να δείξετε ότι η παράσταση $A$ παίρνει τη μορφή: $A=\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3}{1-x}$

**δ.** Χρησιμοποιώντας την απλουστευμένη μορφή της $A$ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση $A=2-\frac{x^2+7x}{x^2-1}$

Μονάδες (1,8+1,8+1+2)=6,6

## Άσκηση 3η

Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο, με $ΑΒ=75$, $ΑΔ=40$ και $Ε$ είναι το μέσον του $ΒΓ$.




**α.** Να δείξετε ότι $ΒΔ=85$.

**β.** Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $ΖΑΔ$ και $ΖΕΒ$ είναι όμοια.

**γ.** Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΖΒ}{ΖΔ}$ και μετά τα τμήματα $ΖΔ$ και $ΖΒ$.

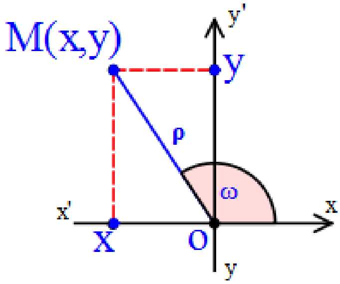
**δ.** Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(ΖΕΒ)}{(ΖΑΔ)}$

Μονάδες (1,6+2+2+1)=6,6

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θέμα 1ο

**Α1.** Στο διπλανό σχήμα είναι $\mathbf{x\hat{O}M = \omega}$, με συντεταγμένες του σημείου $\mathbf{M(x,y)}$ και $\boldsymbol{\rho}$ η απόσταση του σημείου $\mathbf{M}$ από την αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε γωνία $\boldsymbol{\omega}$ με $\mathbf{συν\omega \neq 0}$ ισχύει: $\mathbf{εφ\omega = \dfrac{ημ\omega}{συν\omega}}$




**Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.**

1. $\mathbf{ημ\omega = ημ\left(180^\circ - \omega\right)}$
2. $\mathbf{ημ^2\omega + συν^2\omega = 1}$
3. $\mathbf{εφ\left(180^o - \omega\right) = εφ\omega}$
4. $\mathbf{ημ\omega = εφ\omega \cdot συν\omega}$

Μονάδες (3+3,6)=6,6

## Θέμα 2ο

Δίνεται η εξίσωση δευτέρου βαθμού $\mathbf{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0}$ με $\mathbf{\alpha \neq 0}$.

**Β1.** Να γράψετε τον τύπο της διακρίνουσας $\mathbf{\Delta}$.

**Β2.** Αν $\mathbf{\Delta}$ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης $\mathbf{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0}$ με $\mathbf{\alpha \neq 0}$, τότε να αντιστοιχίσετε σε κάθε περίπτωση της στήλης (Α) το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη (Β).

| Στήλη Α | Στήλη Β |
|---|---|
| **α.** $\mathbf{\Delta > 0}$ | **1.** Η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση |
| **β.** $\mathbf{\Delta = 0}$ | **2.** Η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις |
| **γ.** $\mathbf{\Delta \geq 0}$ | **3.** Η εξίσωση έχει μία διπλή λύση |
| **δ.** $\mathbf{\Delta < 0}$ | **4.** Η εξίσωση δεν έχει λύση |

| α | β | γ | δ |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Β3.** Να επιλέξετε για τις παρακάτω προτάσεις την σωστή απάντηση:

Αν $\Delta > 0$ τότε:

**i)** $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ **ii)** $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ **iii)** $x = -\beta \pm \sqrt{\Delta}$

Μονάδες (1,3+4+1,3)=6,6

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

## Άσκηση 1η

Δίνεται το γραμμικό σύστημα των 2 εξισώσεων, που παριστάνουν δύο ευθείες, την πρώτη εξίσωση την ονομάζουμε ευθεία $\varepsilon_1$, και τη δεύτερη εξίσωση ευθεία $\varepsilon_2$

$$\varepsilon_1 : \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{3} = 3 \qquad \varepsilon_2 : 2(x+4) - 3y = 6$$

**α.** Να δείξετε ότι το προηγούμενο σύστημα μετατρέπεται στο ακόλουθο σύστημα:

$$\varepsilon_1 : 3x + 4y = 31$$
$$\varepsilon_2 : 2x - 3y = -2$$

**β.** Να λύσετε το παραπάνω σύστημα

**γ.** Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Οι παραπάνω ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ είναι:

**1)** Παράλληλες **2)** ταυτίζονται **3)** τέμνονται

Μονάδες (2+2,6+2)=6,6

## Άσκηση 2η

Δίνεται η εξίσωση $(y+1)^2 = 5(y+1)$

**α.** Να δείξετε ότι η εξίσωση μετασχηματίζεται στην ισοδύναμή της $y^2 - 3y - 4 = 0$

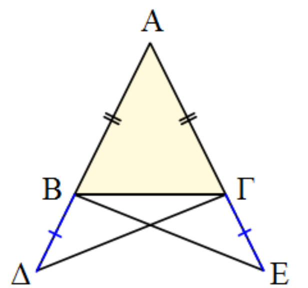
**β.** Να βρείτε τη διακρίνουσα $\Delta$.

**γ.** Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης.

Μονάδες (2+2+2,6)=6,6

## Άσκηση 3η

Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών $AB, A\Gamma$ ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ να πάρετε αντιστοίχως τμήματα $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι γωνία $\Delta$ είναι ίση με τη γωνία $E$.




Μονάδες 6,6

**25**

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θέμα 1ο

**Α1.** Τι λέγεται **ταυτότητα**;

**Α2.** Να αποδείξετε ότι: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

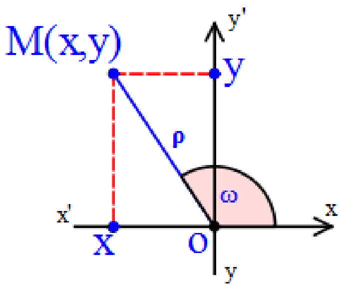
**Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.**

1. Τα αντίθετα μονώνυμα είναι πάντα όμοια.
2. Για να πολλαπλασιάσουμε δυο μονώνυμα πρέπει να είναι πάντα όμοια.
3. Το πολυώνυμο $P(x)=2x^2-3x-x^3+2014$ είναι 2ου βαθμού.

Μονάδες (2,4+2,4+1,8)=6,6

## Θέμα 2ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο σύστημα αξόνων $Oxy$, σημείο $M(x,y)$ με $OM=\rho$ και γωνία $x\hat{O}M=\omega$




**Β1.** Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $\rho=\dots\dots$, β) $\eta\mu\omega=\dots\dots$,

γ) $\sigma\upsilon\nu\omega=\dots\dots$, δ) $\varepsilon\varphi\omega=\dots\dots$

**Β2.** Να αποδείξετε τη σχέση $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$

**Β3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.**

**α.** Ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu120^o=-\frac{1}{2}$

**β.** Αν για τη γωνία $\omega$ ισχύει $\eta\mu\omega>0$, τότε η $\omega$ είναι απαραίτητα οξεία.

**γ.** Αν $\eta\mu\omega=0$, τότε $\sigma\upsilon\nu\omega=1$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

Δίνεται η παράσταση $B=\left(y+\frac{2y}{y-2}\right):\left(1+\frac{4}{y^2-4}\right)$

**α.** Να αποδείξετε ότι: $B=y+2$

**β.** Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2}{y}\cdot B-\frac{y+5}{y-1}=0.$

Μονάδες (3+3,6)=6,6

### Άσκηση 2η

Δίνεται το σύστημα $(\Sigma_1):\begin{cases}(2x+3)(x-1)-y=2x^2+1\\ x-(y-2)^2=-y^2+20\end{cases}$

**α.** Να δείξετε ότι μετά από πράξεις το $(\Sigma_1)$ γράφεται στη μορφή:

$$(\Sigma_2):\begin{cases}x-y=4\\ x+4y=24\end{cases}$$

**β.** Να λύσετε το σύστημα στη νέα μορφή.

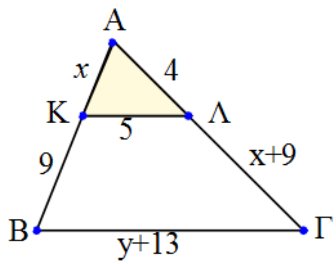
**γ.** Αν τα συστήματα $(\Sigma_2)$ και $\begin{cases}\alpha x+\beta y=-1\\ \beta x+\alpha y=4\end{cases}$

έχουν την ίδια λύση, να βρείτε τους αριθμούς $\alpha$ και $\beta$.

Μονάδες (2,2+2,2+2,2)=6,6

### Άσκηση 3η

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΚΛ$ παράλληλη στη $ΒΓ$, $ΑΚ=x\text{cm}$, $ΑΛ=4\text{cm}$, $ΚΛ=5\text{cm}$, $ΚΒ=9\text{cm}$, $ΛΓ=(x+9)\text{cm}$ και $ΒΓ=(y+13)\text{cm}$




**α.** Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΚΛ$ είναι όμοια.

**β.** Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $ΑΒΓ$.

Μονάδες (3,3+3,3)=6,6