Φ Ρ Ο Ν Τ Ι Σ Τ Η Ρ Ι Α Π Ρ Ω Τ Ο Π Α Π Α

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Παρασκευή 1/5/2026

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 3 ΩΡΕΣ

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ΄ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 8)

Α2. Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζεται πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α.

(Μονάδες 3)

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

(Μονάδες 4)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν $f: A \to \mathbb{R}$ και $f^{-1}: f(A) \to \mathbb{R}$ η αντίστροφη, τότε ισχύει: $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, για $x \in A$.

ii. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f,g: R→$\mathbb{R}$ ισχύει:
Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x) - g(x)\right] = 0$.

iii. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ΄ αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο Δ.

iv. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους και δεν είναι συνεχείς σε αυτό.

v. Για κάθε συνάρτηση f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει καμπή, ισχύει $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(1+x)\cdot e^{-x},\ x\geq 0.$

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(Μονάδες 7)

Β2. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C της f και να σχεδιάσετε τη C.

(Μονάδες 6)

Β3. Αν $g(x)=\ln x$ να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

(Μονάδες 4)

Β4. Έστω η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{1+\ln x}{x},\ x\geq 1$ και Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1, x=λ όπου λ>1.

Να βρείτε την τιμή του λ ώστε $E=\dfrac{3}{2}$ τ.μ.

(Μονάδες 8)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-\alpha$ με $x\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη (ε) διέρχεται από το σημείο Μ(α,0) και στην συνέχεια να δείξετε ότι η (ε) έχει μόνο ένα κοινό σημείο με την C_f.

(Μονάδες 5)

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μία λύση $x_0\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 4)

Αν $x=x_0$ η λύση της εξίσωσης f(x)=0 τότε:

Γ3. Να αποδείξετε ότι: $e^{x_0}+1<e^{\alpha-x_0}<e^{\alpha}+1$.

(Μονάδες 6)

Γ4. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g για την οποία ισχύει: $g\left(e^x\right) \le g(\alpha - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο με τετμημένη $x = e^{x_0}$, όπου x_0 του ερωτήματος Γ2 είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

(Μονάδες 5)

β) Αν επί πλέον δίνεται ότι η g είναι κοίλη, να μελετήσετε τη μονοτονία της g.

(Μονάδες 5)

Θέμα Δ

Δ1. Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$\left(f'(x) - x\right) \cdot e^{f(x) - \frac{x^2}{2}} + \eta\mu x = 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και f(0)=0, τότε να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(\sigma\upsilon\nu x), x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(Μονάδες 5)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f για x=0 παρουσιάζει μοναδικό μέγιστο.

(Μονάδες 7)

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$

(Μονάδες 5)

Δ4. Να αποδείξετε ότι $2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx > 1$.

(Μονάδες 8)

Ευχόμαστε επιτυχία!