Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1.	**Σωστό.** *Η f(x) είναι άρτια συνάρτηση.*
2.	**Σωστό.**
3.	**Σωστό.**
4.	**Λάθος.** *Είναι* $\lvert f(x)\rvert \geq 0$.
5.	**Λάθος.** *Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στη σύνθεση συναρτήσεων.*
6.	**Λάθος.** *Παράδειγμα για τις συναρτήσεις* $f(x)=x+1,\ x\in IR,\ g(x)=x+2,\ x\in IR$, *ισχύει* $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x+3,\ x\in IR$
7.	**Λάθος.** *Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στη σύνθεση συναρτήσεων.*
8.	**Σωστό.**
9.	**Σωστό.** *Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στη σύνθεση συναρτήσεων.*
10.	**α. Λάθος.** *Είναι* $(g\circ f)(x)=\frac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$. **β. Σωστό.**
11.	**Σωστό.**
12.	**Λάθος.**

	Παράδειγμα η $g(x)=\begin{cases} x & , \ x\le 0 \\ \frac{1}{x} & , \ x>0 \end{cases}$
13.	**Σωστό.**
14.	**Σωστό.**
15.	**Σωστό.** *Γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων* f *και* f^{-1} *είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία* $y = x$.
16.	**Σωστό.**
17.	**Σωστό.**
18.	**Λάθος.** *Η συνάρτηση* $f(x)=ημx$ *παρουσιάζει μέγιστο, το* $y=1$, *σε καθένα από τα σημεία* $2kπ+\frac{π}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ *και ελάχιστο, το* $y=-1$, *σε καθένα από τα σημεία* $2kπ-\frac{π}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.
19.	**Σωστό.**
20.	**Λάθος.** *Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν για* ***οποιαδήποτε*** $x_1, x_2 \in Δ$ *με* $x_1 < x_2$, *ώστε* $f(x_1)< f(x_2)$.
21.	**Λάθος.** *Μία συνάρτηση* $f:A\to IR$ *είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε* $x_1, x_2 \in A$ *ισχύει η συνεπαγωγή: αν* $f(x_1)= f(x_2)$, *τότε* $x_1 = x_2$.
22.	**Σωστό.** *Παράδειγμα η* $g(x)=\begin{cases} x & , \ x\le 0 \\ \frac{1}{x} & , \ x>0 \end{cases}$.

23.	**Σωστό.**
24.	**Λάθος.** *Αν η συνάρτηση f είναι* $1-1$, *τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.*
25.	**Σωστό.**
26.	**Σωστό.** *Γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και* f^{-1} *είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία* $y = x$.
27.	**Σωστό.**
28.	**Σωστό.** *Αν η συνάρτηση f είναι 1 - 1, οι συναρτήσεις g, h έχουν πεδίο ορισμού το R και ισχύει* $f\left(g(x)\right)=f\left(h(x)\right)$ *για κάθε* $x \in IR$, *τότε προκύπτει* $g(x)=h(x)$, *για κάθε* $x \in IR$.
29.	**Σωστό.** *Γιατί το σύνολο τιμών της f είναι ανοιχτό διάστημα.*
30.	**Σωστό.** *Γιατί η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή τον αξόνων.*
31.	**Σωστό.** *Γιατί η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον y'y.*
32.	**Λάθος.** *Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και 1-1, για κάθε* $x \neq -x$ *θα ισχύει* $f(x) \neq f(-x)$ *που είναι άτοπο.*
33.	**i. Σωστό.** **ii. Σωστό.**
34.	**Λάθος.**

	Αν η συνάρτηση f είναι άρτια δεν είναι 1-1.
35.	**i. Σωστό.** *Για κάθε* $x_1<x_2$ *συνεπάγεται* $(gof)(x_1)<(gof)(x_2)$ **ii. Σωστό.** *Για κάθε* $x_1<x_2$ *συνεπάγεται* $(gof)(x_1)>(gof)(x_2)$
36.	**Σωστό.**
37.	**Σωστό.**
38.	**Λάθος.** *Ισχύει ότι* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$
39.	**Σωστό.** *Ισχύει* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$
40.	**Σωστό.**
41.	**Σωστό.** *Προκύπτει από το ότι :* $-\lvert f(x)\rvert\le f(x)\le\lvert f(x)\rvert$ *και από το κριτήριο παρεμβολής.*
42.	**Σωστό.**
43.	**Σωστό.**
44.	**Σωστό.** *Εφόσον βέβαια η f ορίζεται εκατέρωθεν του* x_0
45.	**Λάθος.** *Παράδειγμα* $f(x)=\frac{\lvert x\rvert}{x}+x,\quad g(x)=x-\frac{\lvert x\rvert}{x}.$ *Είναι* $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)=0$ *αλλά δεν υπάρχουν τα* $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ *και* $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$

46.	**Σωστό.**
47.	**Λάθος.** *Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια* $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ *και* $f(x)<g(x)$ *για κάθε x κοντά στο* x_0, *ισχύει* $\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)$.
48.	**Σωστό.** *Είναι* $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)}{x-1}(x-1)\right]=\ell\cdot 0=0$.
49.	**Λάθος.** *Είναι* $\lim_{x\to 0} f(x)\ge 1$.
50.	**Σωστό.** *Είναι* $0\le f(x)\le 1 \overset{x^2\ge 0}{\Rightarrow} 0\le x^2 f(x)\le x^2$ *και κριτήριο παρεμβολής.*
51.	**Λάθος.** *Παράδειγμα* $f(x)=\frac{\lvert x\rvert}{x}$. *Είναι* $\lim_{x\to 0}\lvert f(x)\rvert=1$, *αλλά το* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *δεν υπάρχει.*
52.	**Σωστό.** *Προκύπτει από το ότι :* $-\lvert f(x)\rvert\le f(x)\le\lvert f(x)\rvert$ *και από το κριτήριο παρεμβολής.*
53.	**Λάθος.** *Παράδειγμα :* $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$. *Είναι* $\lim_{x\to 1} f(x)=2$ *και* $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$
54.	**Σωστό.**
55.	**Λάθος.** *Παράδειγμα* $f(x)=\frac{\lvert x\rvert}{x}+x,\quad g(x)=x-\frac{\lvert x\rvert}{x}$.

	Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)=0$ *αλλά δεν υπάρχουν τα* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *και* $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$
56.	**Λάθος.** *Παράδειγμα* $f(x)=\frac{\lvert x\rvert}{x}$, $g(x)=x$. *Είναι* $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=0$ *αλλά δεν υπάρχει το* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
57.	**Λάθος.** *Παράδειγμα* $f(x)=\frac{\lvert x\rvert}{x}$. *Είναι* $\lim\limits_{x\to 0}\lvert f(x)\rvert=1$, *αλλά το* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *δεν υπάρχει.*
58.	**Σωστό.** *Είναι* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3f(3x)}{3x}\overset{u=3x}{=}3\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=3\ell$
59.	**Σωστό.** *Είναι* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}\overset{\ell\neq 0}{=}\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}=\frac{1}{\ell}$
60.	**Σωστό.** *Είναι* $\frac{1}{\pm\infty}=0$
61.	**Σωστό.**
62.	**Λάθος.** *Αν* $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$ *και* $f(x)<0$ *κοντά στο* x_0 *τότε* $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{1}{f(x)}=-\infty$
63.	**Λάθος.** *Το* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^{2\nu+1}}\right)$ *δεν υπάρχει αφού τα πλευρικά όρια δεν συμπίπτουν.*
64.	**Σωστό.**

65.	**Λάθος.** *Αν είναι* $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, *τότε* $f(x)>0$ *κοντά στο* x_0
66.	**Σωστό.**
67.	**Σωστό.**
68.	**Λάθος.** *Αν είναι* $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, *τότε* $f(x)<0$ *κοντά στο* x_0
69.	**Λάθος.** *Παράδειγμα* $f(x)=\eta\mu^2 x$ *και* $g(x)=\frac{1}{x^2}$. *Είναι* $\lim_{x\to 0}\eta\mu^2 x=0$ *και* $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$, *αλλά* $\lim_{x\to 0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2=1$
70.	**Λάθος.** $\lim_{x\to 0}\left[x\left(\frac{1}{x^2+x}\right)\right]=\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x}=0\cdot\infty=$ *απροσδιόριστη μορφή..*
71.	**Λάθος.** *Παράδειγμα* $f(x)=\frac{1}{x^2}$ *και* $g(x)=-\eta\mu^2 x$. *Είναι* $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$, $g(x)<0$, *κοντά στο* 0, *αλλά* $\lim_{x\to 0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]=-1$
72.	**Λάθος.** *Παράδειγμα η* $f(x)=-e^{-x}$, $x\in[0,+\infty)$ *είναι γνησίως αύξουσα αλλά* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)=0$.
73.	**Σωστό.**

74.	**Λάθος.** *Αν είναι* $0<\alpha<1$ *τότε* $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$
75.	**Λάθος.** *Αν είναι* $0<\alpha<1$ *τότε* $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$
76.	**Σωστό.**
77.	**Λάθος.** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$
78.	**Λάθος.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\eta\mu x\right)=0$ *(μηδενική επί φραγμένη).*
79.	**α) Σωστό.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)\overset{u=\frac{1}{x}}{=}=\lim\limits_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$ **β) Λάθος.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\eta\mu x\right)=0$ *(μηδενική επί φραγμένη).*
80.	**Λάθος.** *Παράδειγμα για την* $f(x)=-e^x$ *ισχύει* $f(x)\le\frac{1}{x^2}$ *αλλά* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^x\right)=-\infty$.
81.	**Σωστό.**
82.	**Λάθος.** *Παράδειγμα η* $f(x)=1-x^2$ *είναι συνεχής στο* $[-2,2]$ *με* $f(-2)=-3<0$, $1\in(-2,2)$ *με* $f(1)=0$, *αλλά* $f(2)=-3<0$

83.	**Λάθος.** *Πρέπει να είναι συνεχής στο [α, β] .*
84.	**Σωστό.** *Είναι το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.*
85.	**Λάθος.** *Πρέπει η g να είναι συνεχής στο να είναι συνεχής στο* $f(x_0)$.
86.	**Σωστό.**
87.	**Σωστό.**
88.	**Λάθος.** *Αν η f είναι σταθερή συνάρτηση τότε η εικόνα* $f(\Delta)$ *ενός διαστήματος Δ είναι μονοσύνολο.*
89.	**Λάθος.** *Παράδειγμα η* $f(x)=1-x^2$ *είναι συνεχής στο* $[-2,2]$ *και* $1\in(-2,2)$ *με* $f(1)=0$ *αλλά* $f(-2)f(2)=9>0$,
90.	**Σωστό.** *Αφού η f ως πολυωνυμική είναι συνεχής.*
91.	**Σωστό.**
92.	**Σωστό.**
93.	**Λάθος.** *Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α, Β), όπου* $A=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$ *και* $B=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$
94.	**Λάθος.**

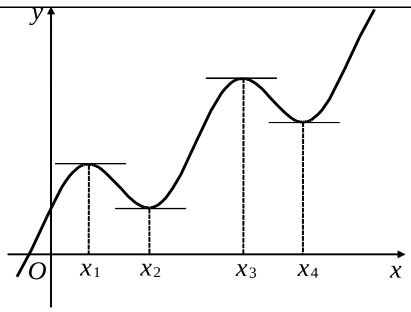
	Δεν γνωρίζουμε αν η f είναι συνεχής στο 6.
95.	**Σωστό.** *Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 4, θα ισχύει* $f(4)=\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-7x+12}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-3)(x-4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x-3)=1$
96.	**Σωστό.** *Προκύπτει από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών αφού* $f(1)<\pi<f(-1)$.
97.	**Λάθος.** *Δεν γνωρίζουμε αν η f είναι συνεχής στο 0.*
98.	**Σωστό.** *Αφού η f ως θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (α, β).*
99.	**Σωστό.** *Προκύπτει από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.*
100.	**Λάθος.** *Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο [α, β] με f(α)≠f(β), παίρνει τις τιμές μεταξύ των f(α) και f(β) αλλά μπορεί να πάρει και τιμές εκτός του διαστήματος που δημιουργούν τα f(α) και f(β).*
101.	**Σωστό.** *Αν η συνάρτηση f + g είναι συνεχής στο* x_0 *τότε αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο* x_0 *και η διαφορά τους* $(f+g)-f=g$ *θα είναι συνεχής, που αυτό είναι άτοπο.*
102.	**Λάθος.** *Οι συναρτήσεις* $f(x)=\begin{cases} x & , x\le 0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} -x & , x\le 0 \\ -x-1, & x>0 \end{cases}$, *δεν είναι συνεχείς στο* $x_0=0$, *αλλά είναι* $(f+g)(x)=0$, $x\in IR$, *η οποία είναι συνεχής στο IR.*
103.	**Λάθος.** *Η συνάρτηση* $f(x)=\lvert x\rvert$ *,είναι συνεχής στο* $x_0=0$*, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ'αυτό.*

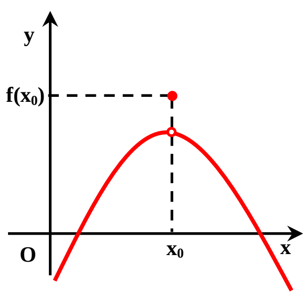
104.	**Λάθος.** Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
105.	**Λάθος.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.
106.	**Σωστό.** Αφού αν η f είναι παραγωγίσιμη x_0, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.
107.	**Λάθος.**
108.	**Λάθος.** $(συνx)' = -ημx$, $x \in \mathbb{R}$
109.	**Λάθος.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x / συνx = 0\}$ ισχύει : $(εφx)' = \dfrac{1}{συν^2 x}$
110.	**Λάθος.** $(σφx)' = -\dfrac{1}{ημ^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x / ημx = 0\}$.
111.	**Λάθος.** $(3^x)' = 3^x \ln 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
112.	**Λάθος.** $(α^x)' = α^x \ln α$.
113.	**Σωστό.**
114.	**Λάθος.** Αν $f(x) = \ln\|x\|$, για κάθε $x \neq 0$, τότε $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ για κάθε $x \neq 0$.
115.	**Λάθος.** $(\ln\|x\|)' = \dfrac{1}{x}$, για κάθε $x < 0$.

116.	**Σωστό.**
117.	**Σωστό.** *Η* f' *είναι συνεχής στο* x_0 *ως παραγωγίσιμη.*
118.	**Λάθος.** *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο* x_0*,τότε η συνάρτηση* $f\cdot g$ *είναι παραγωγίσιμη στο* x_0 *και ισχύει:* $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$
119.	**Λάθος.** *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο* x_0*,τότε η συνάρτηση* $f\cdot g$ *είναι παραγωγίσιμη στο* x_0 *και ισχύει:* $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$.
120.	**Λάθος.** *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο* x_0 *και* $g(x_0)\neq 0$, *τότε η συνάρτηση* $\frac{f}{g}$ *είναι παραγωγίσιμη στο* x_0 *και ισχύει:* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.
121.	**Σωστό.** $(f\circ g)'(0)=f'(g(0))g'(0)=f'(5)\cdot 1=6$ $(g\circ f)'(0)=g'(f(0))f'(0)=g'(4)\cdot 3=2\cdot 3=6$
122.	**Λάθος.** *Παράδειγμα οι συναρτήσεις* $f(x)=\|x\|,\ x\in\mathbb{R}$ *και* $g(x)=1-\|x\|,\ x\in\mathbb{R}$. *Το άθροισμα* $(f+g)(x)=1,\ x\in\mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο* $x_0=0$, *αλλά οι f και g δεν είναι παραγωγίσιμες στο* $x_0=0$.
123.	**Λάθος.** *Παράδειγμα οι συναρτήσεις* $f(x)=\|x\|,\ x\in\mathbb{R}$ *και* $g(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$. *Η συνάρτηση* $f(g(x))=f(x^2)=\|x^2\|=x^2,\ x\in\mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $x_0=0$, *αλλά η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο* $x_0=0$.

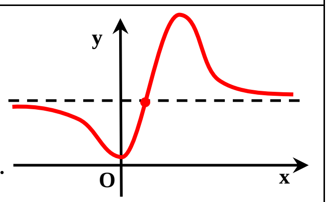
124.	**Σωστό.** *Αν $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, άτοπο.*
125.	**Σωστό.** *Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχουν $\alpha \neq \beta$ με $f(\alpha)=f(\beta)$ οπότε (αν $\alpha < \beta$) η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.*
126.	**Λάθος.** *Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β), αν $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε από Θ.Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ και όχι ακριβώς ένα.*
127.	**Σωστό.** *Αν είναι $f(0)=f(1)$ τότε αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $f'(\xi)=0$, άτοπο.*
128.	**Σωστό.** *Αν η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, με $h(\alpha)=h(\beta)$ οπότε από Θ.Rolle υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε* $$h'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)-g'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=g'(x_0)$$ *που σημαίνει ότι στα σημεία $A(x_0,f(x_0))$ και $B(x_0,g(x_0))$ οι εφαπτόμενες των C_f,C_g είναι παράλληλες.*
129.	**Σωστό.** *Η πολυωνυμική συνάρτηση άρτιου βαθμού έχει παράγωγο μια συνάρτηση περιττού βαθμού η οποία έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα και συνεπώς η γραφική της παράσταση δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.*
130.	**Λάθος.** *Η πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού έχει παράγωγο μια συνάρτηση άρτιου βαθμού η οποία ενδέχεται να μην έχει καμία πραγματική ρίζα και συνεπώς η γραφική της παράσταση να μην δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.*
131.	**Σωστό.**

	Παράδειγμα η $f(x)=x^2$ *στο διάστημα* $[-1, 2]$.
132.	**Σωστό.** *Αν* ρ_1 , ρ_2 *διαδοχικές ρίζες της* $f\,'$ *και η* f *είχε 2 ρίζες* x_1 , x_2 *με* $\rho_1 < x_1 < x_2 < \rho_2$ *τότε αφού* $f(x_1)=f(x_2)=0$ *από Θ.Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα* $\xi \in (x_1, x_2)$ □ (ρ_1, ρ_2) *τέτοιο ώστε* $f\,'(\xi) = 0$, *άτοπο αφού* ρ_1 , ρ_2 *διαδοχικές ρίζες της* $f\,'$.
133.	**Σωστό.** *Αφού η* f *είναι συνεχής στο* $[\alpha, \beta]$ *και παραγωγίσιμη στο* (α, β).
134.	**Σωστό.** *Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει* $x_0 \in (\alpha, \beta)$ *τέτοιο, ώστε* $f'(x_0)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<0$.
135.	**Λάθος.** *Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει* ***ένα τουλάχιστον*** $\xi \in (\alpha, \beta)$ *τέτοιο, ώστε* $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow f'(\xi)=\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta} \Leftrightarrow f(\alpha)-f(\beta)=f'(\xi)(\alpha-\beta)$ *και όχι ένα μόνο* ξ.
136.	**Λάθος.** *Το θεώρημα ισχύει σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.*
137.	**Σωστό.** *Αν η* f *είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο διάστημα* Δ, *οπότε αφού η παράγωγος της είναι μηδέν θα είναι σταθερή στο* Δ.
138.	**Λάθος.** *Ισχύει* $f(x)=g(x)+c$, *για κάθε* $x \in \Delta$
139.	**Λάθος.** *Μπορεί να είναι* $f\,'(x) \geq 0$. *Παράδειγμα η* $f(x)=x^3$.
140.	**Λάθος.** *Η* f *είναι γνησίως αύξουσα.*
141.	**Σωστό.**

	Μπορεί να είναι $f'(x) \geq 0$. *Παράδειγμα η* $f(x) = x^3$..
142.	**Λάθος.** *Μπορεί να είναι* $f'(x) \leq 0$. *Παράδειγμα η* $f(x) = -x^3$.
143.	**Λάθος.** *Πρέπει να αλλάζει και η μονοτονία εκατέρωθεν του* x_0, *Παράδειγμα η* $f(x) = x^3$.
144.	**Λάθος.** *Παράδειγμα η* $f(x) = x^3$ *είναι παραγωγίσιμη στο IR και δεν παρουσιάζει ακρότατα, αφού είναι γνησίως αύξουσα, αλλά* $f'(0) = 0$..
145.	**Σωστό.**
146.	**Σωστό.** *Η παραγωγίσιμη συνάρτηση* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *παρουσιάζει μέγιστο (ή ελάχιστο) στο* x_0, *οπότε από Θ. Fermat θα ισχύει* $f'(x_0) = 0$ *που σημαίνει ότι στο σημείο* $A(x_0, f(x_0))$ *της* C_f *η εφαπτομένη της* C_f *είναι οριζόντια.*
147.	**Λάθος.** *Για να ισχύει το Θ. Fermat πρέπει το* x_0 *να είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος (α, β). Αν* $x_0 = α$ *ή* $x_0 = β$ *τότε η f μπορεί να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο χωρίς να ισχύει ότι* $f'(x_0) = 0$.
148.	**Λάθος.** *Αν* $f'(x) > 0$ *τότε f* ↗ *στο* $(α, x_0)$ *και* $f'(x) < 0$ *τότε f* ↘ *στο* $(x_0, β)$, *οπότε το* $f(x_0)$ *είναι τοπικό μέγιστο της f.*
149.	**Σωστό.**
150.	**Σωστό.** *Στη θέση* x_1 *το τοπικό μέγιστο είναι μικρότερο από το τοπικό ελάχιστο στη θέση* x_4, *που παρουσιάζει η f με τη γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος.* 

151.	**α) Λάθος.** *Η f' δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 1.* **β) Σωστό.** $f'(x)\leq 0$, *αν* $x<2$ *και* $f'(x)>0$, *αν* $x>2$
152.	**α) Λάθος.** **β) Σωστό.** **γ) Λάθος.** *Η f είναι γνησίως αύξουσα και από Θ. Bolzano προκύπτει ότι η μοναδική της ρίζα βρίσκεται στο διάστημα (-1, 0).*
153.	**i) Λάθος.** *Υπάρχει* $x_0\in(1,4)$ *τέτοιο ώστε* $f'(x_0)=0$ **ii) Λάθος.** *Υπάρχει* $x_0\in(1,4)$ *τέτοιο ώστε* $f'(x_0)=0$ **iii) Λάθος.** *Η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο [1, 4]* **iv) Σωστό.** *Η f παρουσιάζει σε* $x_0\in(1,4)$ *μέγιστο οπότε από Θ. Fermat* $f'(x_0)=0$.
154.	**Σωστό.** *Αφού αν για μια συνάρτηση ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Fermat, τότε υπάρχει* x_0 *ώστε* $f'(x_0)=0$.
155.	**Σωστό.** *Μπορεί να είναι* $f'(x)\leq 0$. *Παράδειγμα η* $f(x)=-x^3$.
156.	**Σωστό.** *Για τη συνάρτηση f με τη γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος ισχύει ότι* $f(x)\leq f(x_0)$, *συνεπώς η f παρουσιάζει στο* x_0 *μέγιστο χωρίς να είναι συνεχής στο* x_0. 

157.	**Σωστό.** *Είναι $f'(x) > 0$ στο $\mathbb{R}$.*
158.	**Σωστό.** *Η ύπαρξη προκύπτει από Θ. Rolle και η μοναδικότητα από το ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα αφού $f''(x)>0$.*
159.	**Σωστό.**
160.	**Λάθος.** *Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται **«κάτω»** από τη γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.*
161.	**Λάθος.** *Μπορεί να ισχύει $f''(x)\geq 0$. Παράδειγμα η $f(x)=x^4$.*
162.	**Λάθος.** *Πρέπει να ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.*
163.	**Λάθος.** *Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται **«πάνω»** από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.*
164.	**Σωστό.** *Είναι $f''(x)=6\alpha x+2\beta$ με $\alpha\neq 0$, η οποία μηδενίζει σε ένα ακριβώς σημείο και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο.*
165.	**Λάθος.** *Παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=-\eta\mu x$ έχουν στο $x_0=0$ σημείο καμπής, ενώ η $h(x)=f(x)\cdot g(x)=-\eta\mu^2 x$ δεν έχει στο $x_0=0$ σημείο καμπής αφού η $h''(x)=2(\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x)$ δεν μηδενίζει στο 0.*
166.	**Σωστό.** *Αν ένα εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος Δ είναι θέση σημείου καμπής και η f είναι*

	δυο φορές παραγωγίσιμη τότε η f'' *μηδενίζει στο σημείο αυτό.*
167.	**Σωστό.** *Αν* $f''(x)<0$ *για κάθε* $x\in\Delta$ *τότε η f είναι κοίλη στο Δ.*
168.	**Λάθος.** *Πρέπει να ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο* $A(x_0, f(x_0))$.
169.	**Σωστό.** *Αφού η* f' *είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.*
170.	**Λάθος.** *Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.*
171.	**Σωστό.** *Η γραφική παράσταση της συνάρτησης* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *που φαίνεται στο διπλανό σχήμα τέμνει την οριζόντια ασύμπτωτή της.* 
172.	**α) Λάθος.** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-2)=-1\neq\pm\infty$ **β) Σωστό.** $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x-1}=-\infty$
173.	**Σωστό.**

ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1.	**Δ** $\left(f(x)\right)^2 = f(x) \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2 - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\left(f(x)-1\right)=0$ $\Leftrightarrow f(x)=0$ *(που έχει 3 ρίζες)* ή $f(x)=1$ *(που έχει 2 ρίζες)*
2.	**Β**
3.	**Δ** *Αν η f ήταν γνησίως φθίνουσα θα είχαμε :* $2<3 \Leftrightarrow f(2)>f(3)$
4.	**Γ** *Γιατί οι* C_f, $C_{f^{-1}}$ *είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία* $y = x$
5.	**Δ**
6.	**Β**
7.	**Δ** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^3-x^2-2x}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x(x^2-x-2)}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x(x-2)(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x-2}{x-1}$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-2}{x-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-2}{x-1}=-\infty\end{array}\right\rangle \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2}{x-1}$
8.	**Ε** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}-2\right)\right)^3}{\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^6\left(\frac{1}{x^2}-2\right)^3}{x^6\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^3}=\frac{(0-2)^3}{(1+0)^3}=-8$
9.	**Ε**

	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\lvert x^3-x^2-1\rvert-x^3+x^2}{x^2}\overset{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x^2-1)=+\infty}{\underset{x^3-x^2-1>0}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2-1-x^3+x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2}=0$
10.	**Α, Γ, Ε** *Γιατί* Α) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^{20}-x+1\right)=1>0$ Β) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^{20}-x-1\right)=-1<0$ Γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^9+x-1\right)=+\infty$ Δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^9+x-1\right)=-\infty$ Ε) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^3+x+1\right)=1>0$ ΣΤ) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^3+x-1\right)=-1<0$.
11.	**Ε** *Η μέγιστη τιμή της f στο $[0,3]$ είναι το f(0)=2 και η ελάχιστη τιμή της το f(3)=-1, αν είχαμε δεδομένο ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.*
12.	**Ε**
13.	**Γ** *Συνεχής στο [α, β] και ετερόσημες τιμές στα α και β έχει μόνο η h.*
14.	**Α** *Η f ως παραγωγίσιμη στο x_0 θα είναι και συνεχής στο x_0.*
15.	**Γ** *Γιατί* $f'(x_0)=\lambda_\varepsilon=0$
16.	**Β** *Αν f(x)= εφx, τότε* $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ *και* $\lim\limits_{h\to0}\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$
17.	**Γ** *Αν* $f(x)=\frac{1}{x}$ *τότε* $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$ *και*

	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
18.	**Γ** *Αν* $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ *τότε* $f'(x)=-\eta\mu x$ *και* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(h+x)-\sigma\upsilon\nu x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=-\eta\mu x$
19.	**Ε** $f'(x)=5^{3x}\ln 5\cdot(3x)'=5^{3x}\ln 5\cdot 3=5^{3x}\ln 5^3=5^{3x}\ln 125$
20.	**Γ** $f'(x)=3\sigma\upsilon\nu^2(x+1)\left(\sigma\upsilon\nu(x+1)\right)'=3\sigma\upsilon\nu^2(x+1)\left(-\eta\mu(x+1)\right)(x+1)'$ $=-3\sigma\upsilon\nu^2(x+1)\eta\mu(x+1)$ $f'(\pi)=-3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$
21.	**Γ** *Η f είναι* $6^{ου}$ *βαθμού οπότε η έβδομη παράγωγος αυτής ισούται με 0*
22.	**Γ** $f'(x_0)=g'(x_0)\Leftrightarrow\dfrac{1}{x_0}=4x_0\Leftrightarrow x_0^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{2}$ ή $x_0=-\dfrac{1}{2}$ (απορρίπτεται)
23.	**Ε** $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\dfrac{\beta e^{\beta x}}{\alpha e^{\alpha x}}\Leftrightarrow\dfrac{\beta e^{\beta x}e^{\alpha x}-e^{\beta x}\alpha e^{\alpha x}}{e^{2\alpha x}}=\dfrac{\beta e^{\beta x}}{\alpha e^{\alpha x}}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\dfrac{e^{\beta x}e^{\alpha x}(\beta-\alpha)}{e^{2\alpha x}}=\dfrac{\beta e^{\beta x}}{\alpha e^{\alpha x}}\Leftrightarrow\dfrac{\beta-\alpha}{1}=\dfrac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow\alpha\beta-\alpha^2=\beta\Leftrightarrow\alpha\beta-\beta=\alpha^2\Leftrightarrow\beta=\dfrac{\alpha^2}{\alpha-1}$
24.	**Β** *Η* f_1 *δεν είναι συνεχής στο [α, β]* *Η* f_2 *δεν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)* *Η* f_3 *δεν έχει ίσες τιμές στα α και β*
25.	**Γ**

	$1>0 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(1)>f(0) \Leftrightarrow f(1)>0$.
26.	**Γ** *Αν* $f'(x) \le 0$ *και μηδενίζει σε μεμονωμένα σημεία τότε η f είναι γν. φθίνουσα.*
27.	**Ε** *Ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού έχει τρείς το πολύ ρίζες .*
28.	**Β** *Το σύνολο τιμών της f είναι* $f\left([\alpha, \beta)\right)=\left(\lim_{x\to\beta^-} f(x),\ f(\alpha)\right]$.
29.	**Δ** *Η* $f(x) = x^4$ *στρέφει τα κοίλα άνω και ισχύει* $f''(x) \ge 0$.
30.	**Β** *Ενα σημείο* $A(x_0, f(x_0))$ *ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f αν η f είναι κυρτή στο* (α, x_0) *και κοίλη στο* (x_0, β), *ή αντιστρόφως, και η* C_f *έχει εφαπτομένη στο σημείο* $A(x_0, f(x_0))$.
31.	**Β** *Μια στο* $+\infty$ *και μια στο* $-\infty$
32.	**Δ** *Δεν μπορεί στο ίδιο άπειρο να έχει δύο ασύμπτωτες και αφού είναι συνεχής στο IR δεν μπορεί να έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες*

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

1.

α → Ε, β → Α, γ → Β, δ → Δ

(α)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	↗	
$f'(x)$	-	+	

(β) *Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 και η παράγωγός της είναι σταθερή στα διαστήματα*

(- ∞, 0) και (0, + ∞), αφού η C_f αποτελείται από ημιευθείες.

(γ)

x	$-\infty$		0	$+\infty$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗
$f'(x)$	-	+	-	+

(δ)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	
$f'(x)$	+	

2.

f → Τ, g → Η

(α)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	↗	
$f'(x)$	-	+	

(β) *Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 και η παράγωγός της είναι σταθερή στα διαστήματα*

(- ∞, 0) και (0, + ∞), αφού η C_f αποτελείται από ημιευθείες.

3.

1 → Δ, 2 → Γ , 3 → Α

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x-2}=0$

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. **α.** **Ψ**

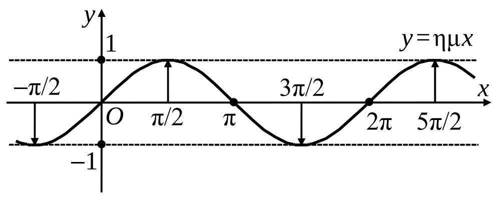
β. Αν $f(x)=x+|x|,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x-|x|,\ x\in\mathbb{R}$ τότε είναι

$$f(x)g(x)=\left(x+|x|\right)\left(x-|x|\right)=x^2-|x|^2=0$$

δηλαδή εδώ έχουμε το γινόμενο δύο συναρτήσεων να είναι η σταθερή συνάρτηση μηδέν χωρίς καμία από τις δυο να είναι η σταθερή μηδέν.

2. **α.** **Ψ**

β. Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ παρουσιάζει μέγιστο, το $y=1$, σε καθένα από τα σημεία $2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ και ελάχιστο, το $y=-1$, σε καθένα από τα σημεία $2k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$, αφού $-1\le\eta\mu x\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.



3. **α.** **Ψ**

β. Για τις συναρτήσεις $f(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\ln x,\ x>0$

ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$, αφού

$D_{f\circ g}=\left\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\right\}=(0,+\infty)$ και $D_{g\circ f}=\left\{x\in R\,/\,f(x)>0\right\}=\mathbb{R}^*$

Επομένως είναι $D_{f\circ g}\neq D_{g\circ f}$, οπότε $f\circ g\neq g\circ f$.

4. **α.** **Ψ**

β. Η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x & ,\ x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & ,\ x>0 \end{cases}$ είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.

5. **α.** **Ψ**

β. Αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$ στο $x_0=0$, περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $(-1,0)\cup(0,1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή παίρνει τη μορφή $f(x)=\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$.

Επομένως, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$.

6. **α.** **Ψ**

β. Αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=-\frac{1}{x^2}+1$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)=-\infty, \quad \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}1=1.$$

7. **α.** **Ψ**

β. Για την f(x)=x, ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x=0$, αλλά

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

Επομένως, **δεν υπάρχει στο μηδέν** το όριο της $\frac{1}{f(x)}$.

8. **Λάθος.**

Για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν} \quad x\neq 1\\ 3, & \text{αν} \quad x=1\end{cases}$ ισχύει

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2, \text{ ενώ } \quad f(1)=3.$$

9. **α.** **Ψ**

β. Η συνάρτηση $f(x)=x^2,\ x\in[-1,1]$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f(0)=0$,

αλλά $f(-1)\cdot f(1)>0$.

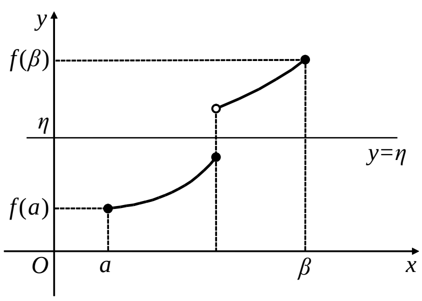
10. **α.** **Ψ**

β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=1,\ x\in[0,2]$.

Αν $\Delta=[0,2]$, η εικόνα $f(\Delta)=\{1\}$ δεν είναι διάστημα.

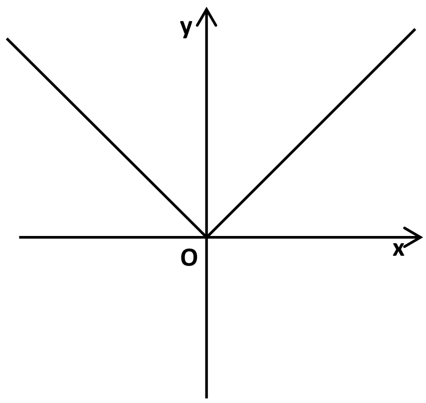
11. **Σωστό**

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



12. α. Ψ

β. Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού



$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1, \quad \text{ενώ}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1.$$

13. α. Ψ

β. Αν $f(x)=\sqrt{x},\ x\ge 0$. και $g(x)=2\sqrt{x},\ x\ge 0$, τότε

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=2x,\ x\ge 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2,$$

άρα η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $(f\cdot g)'(0)=2$.

Αλλά

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty,$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

14. α. Ψ

β. Αν $f(x)=\sqrt{x},\ x\ge 0$ και $g(x)=x-\sqrt{x},\ x\ge 0$, τότε

$$(f+g)(x)=x,\ x\ge 0\ ,$$

άρα η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $(f+g)'(0)=1$, αλλά η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, γιατί

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty.$$

15. α. Ψ

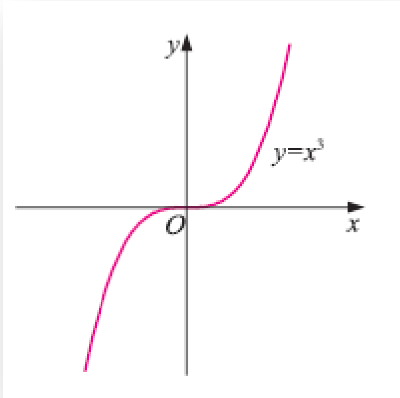
β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1 & ,\ \text{αν } x<0\\ 1 & ,\ \text{αν } x>0\end{cases}$.

Ισχύει ότι $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, αλλά η f δεν είναι σταθερή, αφού παίρνει δύο διαφορετικές τιμές.

16. **α.** **Ψ**

β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3$ αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ που δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού

$$f'(0)=0$$



17. **α.** **Ψ**

β. Η συνάρτηση $f(x)=x^3,\ x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αλλά $f'(0)=0$.

18. **α.** **Ψ**

β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}^*$.

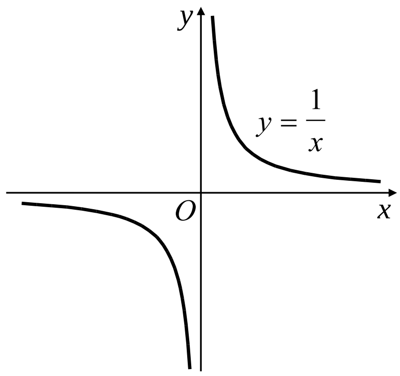
Παρατηρούμε ότι, αν και

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ για κάθε $x\in A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,

η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, και $(0,+\infty)$.

Δεν είναι όμως γνησίως φθίνουσα στο IR* αφού

$-1<1$ αλλά $f(-1)<f(1)$.



19. **α.** **Ψ**

β. Η συνάρτηση $f(x)=x^3,\ x\in\mathbb{R}$ δεν έχει ακρότατα γιατί είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αλλά $f'(0)=0$.

20. **α.** **Ψ**

β. Η συνάρτηση $f(x)=x^3,\ x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(0)=0$, αλλά η f δεν έχει ακρότατο στο $x_0=0$.

21. **α.** **Ψ**

β. Η συνάρτηση $f(x)=x,\ x\in[1,2]$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=2$, αλλά είναι $f'(2)=1\neq 0$.

22. **α.** **Ψ**

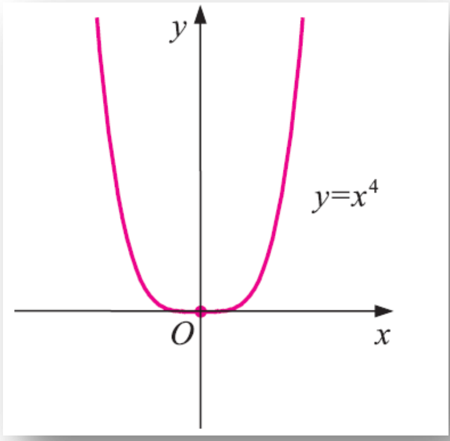
β. **Αντιπαράδειγμα**

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$.

Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=4x^3$ και $f''(x)=12x^2\geq 0$,

Είναι $f''(0)=0$, αλλά το $x_0=0$ δεν είναι θέση σημείου καμπής αφού η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.



23. **α.** **Ψ**

β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$.

Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=4x^3$ και $f''(x)=12x^2\geq 0$,

Η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα , οπότε η f κυρτή , ενώ το $f''(0)=0$

24. **α.** **Ψ**

β. Η συνάρτηση $f(x)=x^4$. Επειδή η $f'(x)=4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f''(0)=0$

25. **α.** **Ψ**

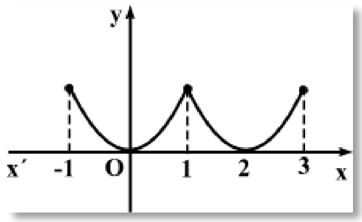
β. Η συνάρτηση $f(x)=x^4,\ x\in\mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=4x^3 \text{ και } f''(x)=12x^2,\ x\in\mathbb{R}.$$

Είναι $f''(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει σημείο καμπής, αλλά $f''(0)=0$.

26. **α.** **Ψ**

β. Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } -1\leq x\leq 1 \\ (x-2)^2, & \text{αν } 1<x\leq 3 \end{cases}$



Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Είναι: $f'(x)=\begin{cases} 2x, & \text{αν } -1\leq x<1 \\ 2(x-2), & \text{αν } 1<x\leq 3 \end{cases}$ Η f' είναι γν. αύξουσα στα $(-1,1)$ και $(1,3)$,

άρα η f στρέφει τα κοίλα πάνω σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,1]$ και $[1,3]$, όμως η f δε στρέφει τα κοίλα πάνω στην ένωση $[-1,1]\cup[1,3]=[-1,3]$, αφού η f' δεν είναι γν. αύξουσα στο $(-1,3)$. Πράγματι, $f'(\frac{1}{2})=1$ και $f'(\frac{3}{2})=-1$, δηλαδή $f'(\frac{1}{2})>f'(\frac{3}{2})$.