



### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ .

Να αποδείξετε ότι αν:

η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και

$$f(\alpha) \neq f(\beta)$$

τότε,

για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$

υπάρχει ένας, τουλάχιστον,  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

Μονάδες 7

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

**A3.** Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:

«Μια περιοδική συνάρτηση δεν μπορεί να έχει ακρότατα»

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθής ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

**α.** Αν για δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορίζονται οι  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε ισχύει πάντοτε  $f \circ g \neq g \circ f$

**β.** Αν είναι  $0 < \alpha < 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$

**γ.** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα

**δ.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

**ε.** Αν  $E_1, E_2$  είναι δυο παράγουσες μιας συνάρτησης  $f$ , τότε αυτές διαφέρουν κατά μια σταθερά  $c$

Μονάδες  $5 \times 2 = 10$



## ΘΕΜΑ Β

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει

$$f(\ln x + 2) = 2x \cdot e^2 (1 + \ln x) \quad (1), \text{ για κάθε } x > 0$$

**B1.** Να δείξετε ότι

$$f(x) = 2(x-1) \cdot e^x, x \in \mathbb{R}$$

**B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης

**B3.** Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) + 1 = 0 \text{ έχει δυο ρίζες ετερόσημες}$$

**B4.** Να υπολογίσετε το

$$I = \int_1^{-1} f(x) dx$$

Μονάδες  $(4+7+8+6)=25$

## ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta \sqrt{x} + \gamma, x \geq 0, \text{ με } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*,$$

για την οποία ισχύουν:

➤  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = -2$

➤ Η ευθεία  $(\varepsilon): 7x + 2y - 3 = 0$  είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 1$

**Γ1.** Να δείξετε ότι

$$\alpha = -2, \beta = 1 \text{ και } \gamma = -1$$

**Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της

**Γ3.** Να δείξετε ότι

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{f(x)} dx > \frac{7}{96}$$



**Γ4.** Υλικό σημείο  $M(x, y)$  ξεκινά από το σημείο  $A(0, -1)$  και κινείται επί της  $C_f$  με την τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό  $\frac{1}{2} \mu/s$ . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας  $\omega$  που σχηματίζει η ημιευθεία  $AM$  με τον άξονα  $x'x$  τη χρονική στιγμή  $t_0$  που το σημείο  $M$  έχει τετμημένη  $x(t_0) = \frac{1}{4}$

Μονάδες  $(6+7+5+7)=25$

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής και περιττή συνάρτηση

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

και

η συνάρτηση

$$g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = \sqrt{1-x^2},$$

για τις οποίες ισχύει

$$(g \circ f)(x) = \sin x \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

**Δ1.** Να δείξετε ότι

$$f(x) = \eta \mu x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(x) + \eta \mu \alpha + \alpha}{x} + 2 \frac{\alpha - f(x)}{2x - \pi} = 0 \quad \text{με } \alpha > 1$$

έχει τουλάχιστον μια λύση στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

**Δ3.** Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) + \ln(1-x)^{x-1}}{x-1}$$

**Δ4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g \circ f$  και την ευθεία  $y = \frac{1}{2}$

Μονάδες  $(7+6+5+7)=25$