ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

13

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ

12 ΜΑΙΟΥ 2022

ΘΕΜΑ Α

A1. Ας υποθέσουμε οτι $f(\alpha)<f(\beta)$.

Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$.

Έστω η συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-\eta,\ x\in[\alpha,\beta]$$

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$

εφόσον είναι

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

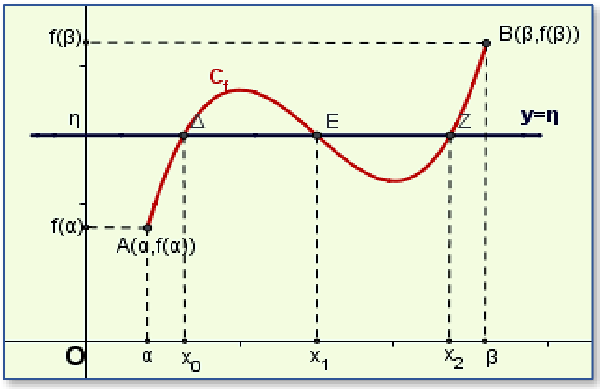
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano,

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$g(x_0)=f(x_0)-\eta=0,$$

οπότε

$$f(x_0)=\eta$$



A2. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β)

και επιπλέον ισχύει:

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}\ .$$

Α3. α. Ψ

β. Παράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x)=ημx,\ x\in\mathbb{R}$ είναι περιοδική, με περίοδο $2π$, αλλά έχει μέγιστη τιμή το 1 ,

για κάθε $x=2kπ+\frac{π}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

Α4. α. **Λ**

β. **Λ**

γ. **Σ**

δ. **Σ**

ε. **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Στη σχέση (1), θέτουμε $u=\ln x+2 \Leftrightarrow u-2=\ln x \Leftrightarrow x=e^{u-2}, u\in\mathbb{R}$,

οπότε

$$f(u)=2e^{u-2}\cdot e^2(1+u-2) \Leftrightarrow f(u)=2(u-1)\cdot e^u, u\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)=2(x-1)\cdot e^x, x\in\mathbb{R}$$

Β2. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι:

$$f'(x)=2e^x+2(x-1)e^x=2(1+x-1)e^x=2x\cdot e^x.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$, το $f(0)=-2$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι: $f''(x)=2e^x+2xe^x=2(1+x)e^x$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	$\frown$	σ.κ.	$\smile$

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, η συνάρτηση f είναι

κοίλη στο διάστημα $(-\infty,-1]$ και κυρτή στο $[-1,+\infty)$.

Παρουσιάζει καμπή στο $x=-1$, με σημείο καμπής της C_f το $(-1,-4e^{-1})$

Β3. Έχουμε

$$f(x)+1=0 \Leftrightarrow f(x)=-1$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]=A_1$,

άρα το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το

$$f(A_1)=\left[f(0),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=[-2,0),$$

εφόσον

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[2(x-1)\cdot e^x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{2(x-1)}{e^{-x}} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-e^{-x}} = 0\,.$$

Ομοίως, η συνάρτηση f είναι

γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_2 = [0,+\infty)$,

άρα

το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι

$$f(A_2) = \left[f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = [-2,+\infty)$$

εφόσον

$$f(0) = -2$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[2(x-1)\cdot e^x\right] = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty\,.$$

Το $-1 \in f(A_1)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1,

άρα

υπάρχει ένα ακριβώς $x_1 < 0$, τέτοιο ώστε $f(x_1) = -1$.

Ομοίως, το $-1 \in f(A_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2,

άρα

υπάρχει ένα ακριβώς $x_2 > 0$, τέτοιο ώστε $f(x_2) = -1$.

Επομένως η εξίσωση

$f(x) + 1 = 0$ έχει δυο ρίζες ετερόσημες

B4. Είναι

$$I = \int_1^{-1} f(x)\,dx = 2\int_1^{-1}(x-1)\cdot e^x dx = 2\int_1^{-1}(x-1)\cdot\left(e^x\right)' dx =$$

$$= 2\left[(x-1)\cdot e^x\right]_1^{-1} - 2\int_1^{-1}(x-1)'\cdot e^x dx = 2\left[(x-1)\cdot e^x\right]_1^{-1} - 2\int_1^{-1} e^x dx =$$

$$= 2\left(-2e^{-1} - 0\right) - 2\left[e^x\right]_1^{-1} = -4e^{-1} - 2\left(e^{-1} - e\right) = 2e - 6e^{-1} = 2\left(e - 3e^{-1}\right)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2+\beta\sqrt{x}+\gamma}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\alpha+\frac{\beta}{x\sqrt{x}}+\frac{\gamma}{x^2}\right)=\alpha+0+0=\alpha$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=-2\Leftrightarrow \alpha=-2$$

Το σημείο επαφής

$$(1, f(1))\in(\varepsilon)\Leftrightarrow 7+2f(1)-3=0\Leftrightarrow f(1)=-2.$$

Είναι

$$f(1)=-2+\beta+\gamma,$$

επομένως

$$-2=-2+\beta+\gamma\Leftrightarrow\gamma=-\beta$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με

$$f'(x)=2\alpha x+\frac{\beta}{2\sqrt{x}}+\gamma=-4x+\frac{\beta}{2\sqrt{x}}+\gamma$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης $(\varepsilon): 7x+2y-3=0$ της C_f στο σημείο της $(1, f(1))$ ισούται με

$$\lambda=-\frac{7}{2}\Leftrightarrow f'(1)=-\frac{7}{2}.$$

Άρα

$$-4+\frac{\beta}{2}+\gamma=-\frac{7}{2}\Leftrightarrow\frac{\beta}{2}-\beta=-\frac{7}{2}+4\Leftrightarrow-\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\beta=-1,$$

οπότε

$$\gamma=1$$

Γ2. Για $\alpha=-2, \beta=1$ και $\gamma=-1$, είναι

$$f(x)=-2x^2+\sqrt{x}-1,\ x\geq 0$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής.

Για κάθε $x>0$, είναι

$$f'(x)=-4x+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{-8x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}.$$

Επομένως:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow -8x\sqrt{x}+1=0 \Leftrightarrow x\sqrt{x}=\frac{1}{8} \Leftrightarrow x^3=\frac{1}{64} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{4}$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow -8x\sqrt{x}+1>0 \Leftrightarrow x\sqrt{x}<\frac{1}{8} \Leftrightarrow x^3<\frac{1}{64} \Leftrightarrow x^3<\left(\frac{1}{4}\right)^3 \overset{x^3\uparrow}{\Leftrightarrow} 0<x<\frac{1}{4}$ και
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow -8x\sqrt{x}+1<0 \Leftrightarrow x\sqrt{x}>\frac{1}{8} \Leftrightarrow x^3>\frac{1}{64} \Leftrightarrow x^3>\left(\frac{1}{4}\right)^3 \overset{x^3\uparrow}{\Leftrightarrow} x>\frac{1}{4}$

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	Τ.Ε	$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$	

Άρα

η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1=\left[0,\frac{1}{4}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, για $x=0$ το $f(0)=-1$

και (ολικό) μέγιστο για $x=\frac{1}{4}$, ίσο με $f\left(\frac{1}{4}\right)=-2\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{2}-1=-\frac{5}{8}$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1=\left[0,\frac{1}{4}\right]$,

άρα

το σύνολο τιμών της στο A_1 είναι το

$$f(A_1)=\left[f(0),f\left(\frac{1}{4}\right)\right]=\left[-1,-\frac{5}{8}\right]$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_2=\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$, άρα

το σύνολο τιμών της στο A_2 είναι το

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), f\left(\frac{1}{4}\right)\right]=\left(-\infty,-\frac{5}{8}\right],$$

εφόσον

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-2x^2+\sqrt{x}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(-2+\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\right)\right]=(+\infty)\cdot(-2)=-\infty$$

Επομένως,

το σύνολο τιμών της f είναι

$$f([0,+\infty))=f(A_1)\cup f(A_2)=\left(-\infty,-\frac{5}{8}\right]$$

Γ3. Είναι

$$f([0,+\infty))=\left(-\infty,-\frac{5}{8}\right],$$

άρα

$$f(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\geq 0.$$

Επομένως

ισχύει

$$e^{f(x)}>f(x)+1$$

και εφόσον οι συναρτήσεις είναι συνεχείς, ισχύει και

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{f(x)}dx>\int_0^{\frac{1}{4}}(f(x)+1)dx \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{4}} e^{f(x)}dx>\int_0^{\frac{1}{4}}\left(-2x^2+\sqrt{x}\right)dx=-2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{4}}+\left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^{\frac{1}{4}}=$$

$$=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{64}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{64}+\frac{1}{8}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{64}=\frac{7}{96},$$

άρα

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{f(x)}dx>\frac{7}{96}$$

Γ4. Για $x>0$, ο συντελεστής διεύθυνσης της ημιευθείας AM ισούται με

$$\lambda=\frac{y+1}{x-0}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=\frac{f(x)+1}{x}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=\frac{-2x^2+\sqrt{x}}{x}=-2x+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Όταν η τετμημένη του σημείου M μεταβάλλεται με το χρόνο t, τότε είναι

$$\varepsilon\varphi\omega(t)=-2x(t)+\frac{1}{\sqrt{x(t)}}\Rightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}\cdot\omega'(t)=-2x'(t)-\frac{1}{x(t)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x(t)}}\cdot x'(t)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\varepsilon\varphi^2\omega(t)\right)\cdot\omega'(t)=\left(-2-\frac{1}{2x(t)\sqrt{x(t)}}\right)\cdot x'(t).$$

Άρα

τη χρονική στιγμή t_0

που το σημείο M έχει τετμημένη

$$x(t_0)=\frac{1}{4}$$

είναι

$$\varepsilon\varphi\omega(t_0)=-2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$$

και τότε:

$$\left(1+\varepsilon\varphi^2\omega(t_0)\right)\cdot\omega'(t_0)=\left(-2-\frac{1}{2x(t_0)\sqrt{x(t_0)}}\right)\cdot x'(t_0)\Leftrightarrow$$

$$\left(1+\frac{9}{4}\right)\cdot\omega'(t_0)=\left(-2-\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{13}{4}\cdot\omega'(t_0)=-3\Leftrightarrow\omega'(t_0)=-\frac{12}{13}\,rad/s$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = A$ είναι

$$g\left(f(x)\right) = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \sqrt{1-f^2(x)} = \sigma\upsilon\nu x \geq 0 \Leftrightarrow 1 - f^2(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow f^2(x) = \eta\mu^2 x \Leftrightarrow |f(x)| = |\eta\mu x|$$

Είναι

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow |\eta\mu x| = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \overset{x\in A}{\Leftrightarrow} x = 0$$

Επομένως είναι

$$f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Η συνάρτηση f στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται σ' αυτό.

Επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Είναι

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} > 0 \text{ , άρα } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Η συνάρτηση f στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται σ' αυτό.

Επομένως

η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Η συνάρτηση **f** είναι περιττή, επομένως το $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} < 0$,

άρα

$$f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

Έτσι:

Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$,

$$|f(x)| = |\eta\mu x| \Leftrightarrow -f(x) = -\eta\mu x \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu x \text{ , αφού } \eta\mu x < 0$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$|f(x)| = |\eta\mu x| \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu x \text{, αφού } \eta\mu x > 0$$

Τελικά, είναι

$$f(x) = \eta\mu x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Δ2. Για $\alpha > 1$, η εξίσωση ορίζεται στο σύνολο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και τότε είναι

$$\frac{f(x) + \eta\mu\alpha + \alpha}{x} + 2\frac{\alpha - f(x)}{2x - \pi} = 0 \Leftrightarrow (2x - \pi)\big(f(x) + \eta\mu\alpha + \alpha\big) + 2x\big(\alpha - f(x)\big) = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = (2x - \pi)\big(f(x) + \eta\mu\alpha + \alpha\big) + 2x\big(\alpha - f(x)\big),\ \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

- Η h είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- Το $h(0) = -\pi(\eta\mu\alpha + \alpha) < 0$, αφού για $\alpha > 1$: $|\eta\mu\alpha| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < \eta\mu\alpha < \alpha$,

  άρα

$$\eta\mu\alpha + \alpha > 0$$

και

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \cdot (\alpha - 1) > 0, \text{ αφού } \alpha > 1.$$

Οπότε είναι

$$h(0) \cdot h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

Επομένως σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τέτοιο ώστε:

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow (2x_0 - \pi)\big(f(x_0) + \eta\mu\alpha + \alpha\big) + 2x_0\big(\alpha - f(x_0)\big) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0) + \eta\mu\alpha + \alpha}{x_0} + 2\frac{\alpha - f(x_0)}{2x_0 - \pi} = 0$$

Άρα η εξίσωση

$$\frac{f(x) + \eta\mu\alpha + \alpha}{x} + 2\frac{\alpha - f(x)}{2x - \pi} = 0 \text{, για } \alpha > 1 \text{, έχει μια τουλάχιστον λύση στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Δ3. Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+\ln(1-x)^{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x^2}+(x-1)\cdot\ln(1-x)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}+\ln(1-x)\right)=(-\infty)+(-\infty)=-\infty$$

εφόσον

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}\underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\right)=\lim_{x\to 1^-}\left(-x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)-1\cdot(+\infty)=-\infty$$

Β΄τρόπος

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{(1-x)\cdot(1+x)}}{-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}=-\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\sqrt{1+x}\right)=-2\cdot(+\infty)=-\infty$$

Δ4. Η συνάρτηση

$$\varphi(x)=(g\circ f)(x)-\frac{1}{2}=\text{συν}x-\frac{1}{2},\ \ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]=A$$

είναι συνεχής.

Είναι :

$$\varphi(x)=0\Leftrightarrow \text{συν}x=\frac{1}{2}\overset{x\in A}{\Leftrightarrow}x=\pm\frac{\pi}{3}.$$

Επομένως

η συνάρτηση φ διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα

$$A_1=\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right),\qquad A_2=\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\quad \text{και}\quad A_3=\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$$

- Το $-\frac{\pi}{2}\in A_1$ και $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}<0$,

  άρα είναι

$$\varphi(x)<0\Leftrightarrow \text{συν}x<\frac{1}{2}\ \text{ για κάθε }\ x\in A_1$$

- Το $0\in A_2$ και $\varphi(0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$,

  άρα είναι

$$\varphi(x)>0\Leftrightarrow \text{συν}x>\frac{1}{2}\ \text{ για κάθε }\ x\in A_2$$

- Το $\frac{\pi}{2} \in A_3$ και $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0$,

  άρα είναι

$$\varphi(x) < 0 \Leftrightarrow \text{συν}x < \frac{1}{2} \text{ για κάθε } x \in A_3$$

Άρα

το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$E = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\text{συν}x - \frac{1}{2}\right)dx = [\text{ημ}x]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \text{ τ.μ.}$$