



ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

14

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

31 ΜΑΙΟΥ 2026

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

Μονάδες 7

A2. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 4

A3. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:

«Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι f^2 είναι συνεχής, τότε η f είναι πάντοτε συνεχής»

α. Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθής ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. Μονάδα 1

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. Μονάδες 3

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

α. Αν η συνάρτηση f είναι 1-1, οι συναρτήσεις g, h έχουν πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και ισχύει $f(g(x)) = f(h(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε οι συναρτήσεις g και h είναι ίσες

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

γ. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

δ. Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$

ε. Έστω μια συνάρτηση f , συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες $5 \times 2 = 10$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1, 0)$ και για την οποία ισχύει :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h} = 4 \quad (1)$$

B1. Να δείξετε ότι

$$\alpha = 1 \text{ και } \beta = -1.$$

B2. Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} < x$$

B3. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης. Με τι ισούται η μέγιστη τιμή;

B4. Υλικό σημείο $M(x, y)$ ξεκινά από το σημείο A και κινείται επί της C_f , με την τετμημένη του να αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων της C_f στα οποία κάποια χρονική στιγμή t_0 ισχύει

$$x'(t_0) + y'(t_0) = 0$$

Μονάδες $(7+5+6+7)=25$

Θ Ε Μ Α Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A = (-\pi, \pi)$, για την οποία ισχύει η σχέση

$$e^{f(x)} \cdot \sigma\upsilon\nu x = (e^{f(x)} - e) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \eta\mu \left(-\frac{1}{x} \right) \right], \text{ για κάθε } x \in A$$

Γ1. i. Να δείξετε ότι

$$f(x) = 1 - \ln(1 + \sigma\upsilon\nu x), \quad x \in A$$

ii. Να δείξετε ότι

$$f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in A$$

Γ2. Να λύσετε στο $(-\pi, \pi)$ την ανίσωση

$$\sqrt{3} \cdot \eta\mu x > 1 + \sigma\upsilon\nu x$$

Γ3. Να υπολογίσετε τα

i. $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\eta\mu x}$ και

ii. $\lim_{x \rightarrow \pi} (f(x) \cdot \sigma\phi x)$

Γ4. Να υπολογίσετε το

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \eta\mu x dx$$

Μονάδες $[(4+3)+5+(3+3)+7]=25$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, για την οποία ισχύει:

$$f(0) = 1 \quad \text{και} \quad 2\sqrt{x} \cdot f'(x) = 3x \cdot f(x), \quad (1) \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Δ1. i. Να δείξετε ότι

$$f(x) = e^{x\sqrt{x}}, \quad x \geq 0$$

ii. Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f και είναι

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\ln^2 x}, \quad x \geq 1$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το

$$I = \int_1^e \frac{f^{-1}(x)}{x} dx.$$

Δ2. Να υπολογίσετε τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{f(x)}$ και

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - \ln f(x) - 1}{\eta\mu x}$.

Δ3. Έστω ε_1 η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ε_2 η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$. Αν ω_1, ω_2 είναι οι γωνίες που σχηματίζουν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα, με τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι $\omega_1 < \omega_2$.

Δ4. i. Να δείξετε ότι για κάθε $k \geq 1$, ισχύει ότι

$$\int_{k-1}^k f(x) dx \leq e^{k\sqrt{k}}$$

ii. Να υπολογίσετε το

$$J = \int_0^1 \frac{e^{x\sqrt{x}}}{e^{x\sqrt{x}} + e^{(1-x)\sqrt{1-x}}} dx$$

Μονάδες $[(3+4)+(3+3)+5+(3+4)]=25$

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

- 1.** Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το Εξεταζόμενο μάθημα.
Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή.
Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα.
Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομα σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιό σας και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5. Διάρκεια εξέτασης:**
τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6 Χρόνος δυνατής αποχώρησης:**
δυο (2) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**