ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

14

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ

31 ΜΑΙΟΥ 2026

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0),$$

οπότε είναι

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)==f'(x_0)\cdot 0=0,$$

αφού

η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

δηλαδή

η f είναι συνεχής στο x_0.

Α2. Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ’ ένα διάστημα Δ είναι:

- τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και
- τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''.

Α3. α. Ψ

β. Παράδειγμα:

Για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1, \text{ αν } x<0\\ 1, \text{ αν } x\geq 0\end{cases}$,

προφανώς ισχύει ότι

$$\text{η συνάρτηση } f^2(x)=1,\ x\in\mathbb{R} \text{ είναι συνεχής.}$$

Ωστόσο η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής, εφόσον το

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

οπότε

$$\text{δεν υπάρχει το } \lim_{x\to 0} f(x)$$

Α4. α. Σ

β. Σ

γ. Λ

δ. Λ

ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το σημείο

$$A(-1,0)\in C_f \Leftrightarrow f(-1)=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=2\ (2)$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-3x^2+2\alpha x+\beta$, $x\in\mathbb{R}$.

Άρα

$$f'(1)=-3+2\alpha+\beta.$$

Στο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{h}=4\ (1)$, θέτουμε $-2h=u$.

Τότε

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(1+u)-f(1)}{-\frac{u}{2}}=4\Leftrightarrow -2\cdot\lim_{u\to 0}\frac{f(1+u)-f(1)}{u}=4\Leftrightarrow \Leftrightarrow -2\cdot f'(1)=4\Leftrightarrow f'(1)=-2,$$

οπότε είναι

$$-3+2\alpha+\beta=-2\Leftrightarrow 2\alpha+\beta=1\ (3).$$

Από

$$(2)+(3)\Rightarrow 3\alpha=3\Leftrightarrow \alpha=1\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\beta=-1.$$

β΄τρόπος

Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{h}\underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{h\to 0}\left[-2\cdot f'(1-2h)\right]=-2\cdot f'(1)$,

εφόσον

η f' είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Επομένως

$$-2\cdot f'(1)=4\Leftrightarrow f'(1)=-2\Leftrightarrow 2\alpha+\beta=1\ \text{ κλπ}$$

Β2. Για $\alpha=1$ και $\beta=-1$, είναι

$$f(x)=-x^3+x^2-x-3,\ x\in\mathbb{R}.$$

Τότε

$$f'(x)=-3x^2+2x-1<0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

εφόσον η διακρίνουσα του τριωνύμου ισούται με $\Delta=4-12=-8<0$ και το $-3<0$.

Άρα

η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2+1>0$,

άρα η ανίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{x^2-3}{x^2+1}<x \Leftrightarrow x^2-3<x^3+x \Leftrightarrow -x^3+x^2-x-3<0 \Leftrightarrow f(x)<f(-1) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} x>-1.$$

Β3. Είναι

$$f''(x)=-6x+2=-6\left(x-\frac{1}{3}\right), x\in\mathbb{R}.$$

Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων της $f''(x)$ και μεταβολών της $f'(x)$,

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$

η συνάρτηση f', ή ισοδύναμα ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f,

παίρνει τη μέγιστη τιμή του, για $x=\frac{1}{3}$, η οποία είναι ίση με $f'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}$

Β4. Το σημείο $M(x,y)$ κινείται επί της C_f, με την τετμημένη του να αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, άρα είναι

$$y=f(x)=-x^3+x^2-x-3 \text{ με } x'(t)>0.$$

Επομένως είναι

$$y(t)=-x^3(t)+x^2(t)-x(t)-3 \Rightarrow \Rightarrow y'(t)=-3x^2(t)\cdot x'(t)+2x(t)\cdot x'(t)-x'(t) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y'(t)=\left(-3x^2(t)+2x(t)-1\right)\cdot x'(t).$$

Άρα τη χρονική στιγμή στιγμή t_0 κατά την οποία ισχύει

$$x'(t_0)+y'(t_0)=0$$

είναι

$$y'(t_0)=\left(-3x^2(t_0)+2x(t_0)-1\right)\cdot x'(t_0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x'(t_0)=\left(-3x^2(t_0)+2x(t_0)-1\right)\cdot x'(t_0)\overset{x'(t_0)>0}{\Leftrightarrow}-1=-3x^2(t_0)+2x(t_0)-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x^2(t_0)+2x(t_0)=0\Leftrightarrow x(t_0)\cdot\left(-3x(t_0)+2\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x(t_0)=0,\ \text{ή}\ -3x(t_0)+2=0\right)\Leftrightarrow\left(x(t_0)=0,\ \text{ή}\ x(t_0)=\frac{2}{3}\right)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i. Το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot ημ\left(-\frac{1}{x}\right)\right]\overset{u=-\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{u\to0}\left(-\frac{1}{u}\cdot ημu\right)=-\lim\limits_{u\to0}\frac{ημu}{u}=-1$.

Επομένως, για κάθε $x\in A$, η σχέση

$$e^{f(x)}\cdot συνx=\left(e^{f(x)}-e\right)\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot ημ\left(-\frac{1}{x}\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}\cdot συνx=\left(e^{f(x)}-e\right)\cdot(-1)\Leftrightarrow e^{f(x)}\cdot συνx=-e^{f(x)}+e\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}\cdot(1+συνx)=e\Leftrightarrow e^{f(x)}=\frac{e}{1+συνx}>0\Leftrightarrow f(x)=\ln\frac{e}{1+συνx}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=1-\ln(1+συνx),\ x\in(-\pi,\pi)$$

ii. Για κάθε $x\in A$,

$$-1<συνx\le1\Leftrightarrow\Leftrightarrow 0<1+συνx\le2\overset{\ln\uparrow}{\Rightarrow}\ln(1+συνx)\le\ln2\Leftrightarrow-\ln(1+συνx)\ge-\ln2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)=1-\ln(1+συνx)\ge1-\ln2>0$$

β΄τρόπος.

Για κάθε $x\in A$, είναι

$$f'(x)=\frac{ημx}{1+συνx}\quad .$$

Η εξίσωση

$$f'(x)=0\Leftrightarrow ημx=0\overset{x\in A}{\Leftrightarrow}x=0$$

Ο πίνακας των προσήμων της $f'(x)$ και των μεταβολών της f είναι:

x	$-\pi$	0	π
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$

Έτσι, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\pi,0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0,\pi)$ και παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$, το $f(0)=1-\ln2>0$.

Επομένως, για κάθε $x \in A$,

ισχύει

$$f(x) \geq f(0) = 1 - \ln 2 > 0$$

Γ2. Στο $(-\pi, \pi)$ το $\sigma\upsilon\nu x > -1 \Leftrightarrow 1 + \sigma\upsilon\nu x > 0$,

οπότε η δοσμένη ανίσωση γίνεται

$$\sqrt{3} \cdot \eta\mu x > 1 + \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} > \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow f'(x) > f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \; (1) \; .$$

Για κάθε $x \in A$,

$$f''(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu x) + \eta\mu^2 x}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{\sigma\upsilon\nu x + 1}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{1}{1 + \sigma\upsilon\nu x} > 0 \, ,$$

άρα

η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα.

Τότε η ανίσωση

$$(1) \Leftrightarrow \; x > \frac{\pi}{3} \text{ και } x \in (-\pi, \pi) \text{ , άρα τελικά } x \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$$

Γ3. i. Είναι

$$\lim_{x \to -\pi} \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\eta\mu x} = \lim_{x \to -\pi^+} \frac{1 - \ln(1 + \sigma\upsilon\nu x)}{1 + \sigma\upsilon\nu x} \overset{u = 1 + \sigma\upsilon\nu x}{=} \lim_{u \to 0^+} \frac{1 - \ln u}{u} =$$

$$= \lim_{u \to 0^+} \left(\frac{1}{u} \cdot (1 - \ln u) \right) = (+\infty) \cdot [-(-\infty)] = +\infty$$

ii. Το $\lim_{x \to \pi} (f(x) \cdot \sigma\varphi x) = \lim_{x \to \pi} f(x) \cdot \lim_{x \to \pi^-} \left(\frac{1}{\eta\mu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x \right) = (+\infty) \cdot (+\infty) \cdot (-1) = -\infty$

εφόσον

$$\lim_{x \to \pi} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} [1 - \ln(1 + \sigma\upsilon\nu x)] \overset{u = 1 + \sigma\upsilon\nu x}{=} \lim_{u \to 0^+} (1 - \ln u) = -(-\infty) = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to\pi^-} ημx = 0 \text{ με } ημx > 0 \text{ , για } x < \pi \text{ κοντά στο } \pi,$$

άρα

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{1}{ημx} = +\infty$$

Γ4. Η συνάρτηση $f(x)\cdot ημx$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και τότε το

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cdot ημx dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\ln(1+συνx)\right)\cdot ημx dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ημx dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} ημx\cdot\ln(1+συνx)dx=-\left[συνx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+J=1+J,$$

όπου

$$J=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} ημx\cdot\ln(1+συνx)dx .$$

Θέτουμε

$$1+συνx=u\Rightarrow -ημx dx=du .$$

Για $x=0\Rightarrow u=2$ και για $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=1$.

Τότε

$$J=\int_2^1 \ln u du=\left[u\cdot\ln u\right]_2^1-\int_2^1 u\cdot\frac{1}{u}du=-2\cdot\ln 2-\left[u\right]_2^1=1-2\cdot\ln 2,$$

άρα τελικά

$$I=1+1-2\cdot\ln 2=2-2\cdot\ln 2$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i. Για κάθε $x>0$, η σχέση

$$2\sqrt{x}\cdot f'(x)=3x\cdot f(x) \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\ln f(x))'=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' \Leftrightarrow \text{υπάρχει } c\in\mathbb{R},$$

τέτοιο ώστε για κάθε $x>0$, $\ln f(x)=x^{\frac{3}{2}}+c \Leftrightarrow f(x)=e^{x^{\frac{3}{2}}+c}=e^{x\sqrt{x}}\cdot e^{c},\ x>0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής, άρα είναι συνεχής και στο 0,

οπότε

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(e^{x\sqrt{x}}\cdot e^{c}\right)=e^{c} \quad \text{και είναι } f(0)=1, \text{ άρα } \ e^{c}=1\Leftrightarrow c=0.$$

Τελικά,

$$f(x)=e^{x\sqrt{x}},\ x\geq 0$$

ii. Από τη σχέση (1) προκύπτει οτι $f'(x)>0$, για κάθε $x>0$.

Άρα η συνάρτηση f, εφόσον είναι και συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$

Επομένως ορίζεται η αντίστροφή της, στο σύνολο

$$D_{f^{-1}}=f([0,+\infty))=\left[f(0),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=[1,+\infty)$$

γιατί:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{x\sqrt{x}} \overset{u=x\sqrt{x}}{=} \lim_{u\to+\infty} e^{u}=+\infty \ .$$

Έστω

$$f(x)=y\geq 1\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x\geq 0$$

άρα

$$e^{x\sqrt{x}}=y\Leftrightarrow x\sqrt{x}=\ln y\geq 0\Leftrightarrow x^{3}=\ln^{2} y\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\ln^{2} y}\ .$$

Επομένως,

$$f^{-1}(y)=\sqrt[3]{\ln^2 y},\ y\geq 1 \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\ln^2 x},\ x\geq 1\ .$$

Η συνάρτηση $\dfrac{f^{-1}(x)}{x}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο διάστημα $[1,e]$, σαν σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Άρα ορίζεται το

$$I=\int_1^e \frac{f^{-1}(x)}{x}dx=\int_1^e \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x}dx\ .$$

Θέτουμε

$$\ln x = u \Rightarrow \frac{1}{x}dx = du\ .$$

Για $x=1 \Leftrightarrow u=0$ και για $x=e \Leftrightarrow u=1$.

Τότε

$$I=\int_0^1 \sqrt[3]{u^2}du=\int_0^1 u^{\frac{2}{3}}du=\left[\frac{u^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_0^1=\frac{3}{5}$$

Δ2. i. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)-x}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}-x}{e^{x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x\sqrt{x}}}\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x}-1\right)\right)=0\cdot(0-1)=0,$$

γιατί:

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x\sqrt{x}}}\overset{u=\sqrt{x}}{=}\lim_{u\to+\infty}\frac{u^2}{e^{u^3}}\underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{2u}{3u^2\cdot e^{u^3}}=\frac{2}{3}\cdot\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u\cdot e^{u^3}}=0,$$

  εφόσον είναι $\lim\limits_{u\to+\infty}e^{u^3}\overset{t=u^3}{=}\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{u\to+\infty}\left(u\cdot e^{u^3}\right)=+\infty$, και

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x}\underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\cdot(\ln x)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3x\cdot\sqrt[3]{\ln x}}=0,$$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

ii. Το ζητούμενο όριο ισούται με:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-\ln f(x)-1}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-x\sqrt{x}-1}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{x^3}-1}{x}-\sqrt{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=\frac{0-0}{1}=0,$$

εφόσον είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{x}\underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\left(3x^2\cdot e^{x^3}\right)=3\cdot 0\cdot 1=0$$

Δ3. Η εφαπτομένη ε_1 της C_f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ δίνεται από τον τύπο

$$\varepsilon_1: y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)\ .$$

Η ευθεία ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αν και μόνο αν ισχύει:

$$-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(-x_0)\Leftrightarrow f(x_0)=\frac{3}{2}x_0\cdot\sqrt{x_0}\cdot f(x_0)\overset{f(x_0)>0}{\Leftrightarrow} x_0\cdot\sqrt{x_0}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x_0^3=\frac{4}{9}\Leftrightarrow x_0=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\ .$$

Άρα είναι

$$\varepsilon\varphi\omega_1=f'\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)\ \text{και}\ \varepsilon\varphi\omega_2=f'(1)\ .$$

Για κάθε $x>0$, είναι

$$f''(x)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot f(x)+\sqrt{x}\cdot f'(x)\right)>0,$$

επομένως

η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

οπότε

$$\frac{4}{9}<1\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{4}{9}}<1\Leftrightarrow 0<f'\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)<f'(1)\Leftrightarrow 0<\varepsilon\varphi\omega_1<\varepsilon\varphi\omega_2\overset{\varepsilon\varphi\uparrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}\omega_1<\omega_2$$

Δ4. i. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $x \in [k-1, k] \subseteq [0, +\infty)$, για $k \geq 1$, οπότε ισχύει

$$f(k-1) \leq f(x) \leq f(k),$$

άρα και

$$\int_{k-1}^{k} f(x)dx \leq \int_{k-1}^{k} f(k)dx = f(k)\cdot(k-k+1) = f(k),$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{k-1}^{k} f(x)dx \leq e^{k\sqrt{k}}$$

ii. Είναι:

$$J = \int_0^1 \frac{e^{x\sqrt{x}}}{e^{x\sqrt{x}} + e^{(1-x)\sqrt{1-x}}}dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}dx.$$

Θέτουμε $1-x = u \Rightarrow dx = -du$.

Για $x = 0 \Leftrightarrow u = 1$ και για $x = 1 \Leftrightarrow u = 0$.

Τότε

$$J = -\int_1^0 \frac{f(1-u)}{f(1-u)+f(u)}du = \int_0^1 \frac{f(1-u)}{f(1-u)+f(u)}du = \int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(1-x)+f(x)}du,$$

οπότε

με πρόσθεση προκύπτει ότι

$$2J = \int_0^1 \frac{f(x)+f(1-x)}{f(x)+f(1-x)}dx = \int_0^1 1dx = 1 \Leftrightarrow J = \frac{1}{2}$$