ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

17

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

1 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει

$$f'(x)=-\nu x^{-\nu-1},$$

δηλαδή

$$(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$$

Μονάδες 4

Α2. Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$ με τύπο $y=f(x)$ και πως συμβολίζεται;

Μονάδες 4

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη, δικαιολογώντας συγχρόνως την* ***απάντηση σας.***

α. Αν $f(x)=\ln x$ και $g(x)=e^{-x}$, τότε $(g\circ f)(x)=\frac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}^*$.

β. Αν $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\ell\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x)\neq0$ για όλα τα $x\in(0,1)$, τότε $f(0)\neq f(1)$

δ. Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, η οποία δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε η f παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές στο $[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 5x3=15

A4. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$, $\ell, m \in \mathbb{R}$ και $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0, τότε κατ' ανάγκη θα είναι:

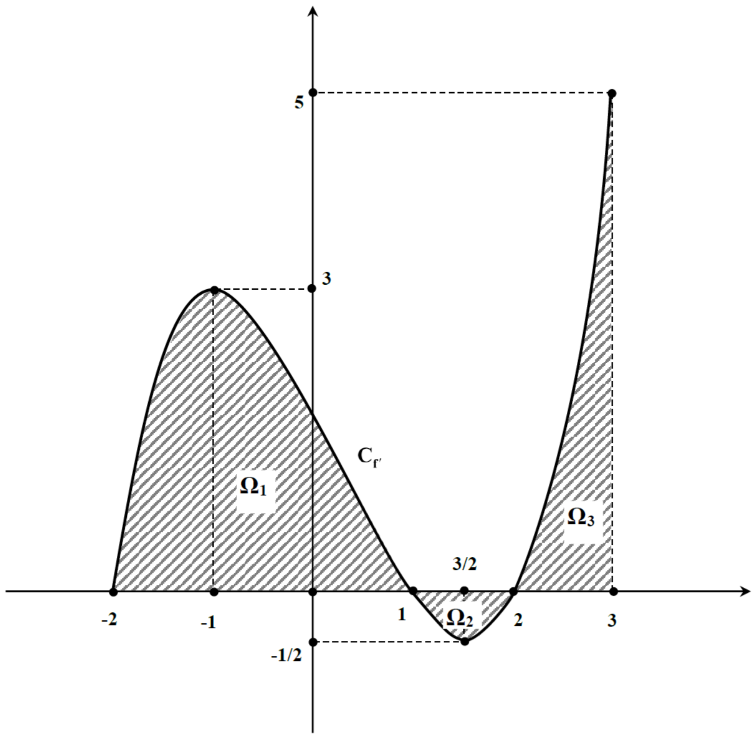
Α. $\ell < m$ **Β.** $\ell \le m$ **Γ.** $\ell \ge m$ **Δ.** $\ell = m$ **Ε.** $m < \ell$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Έστω συνάρτηση $f:[-2,\, 3]\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου f' της συνάρτησης f δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(-2)=-2,\;\; f(-1)=0,\;\; f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{2},$
- $E(\Omega_1)=6,\;\; E(\Omega_2)=1,\;\; E(\Omega_3)=2$

B1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

B3. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

B4. i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Μονάδες [6+6+6+(3+4)]=25

ΘΕΜΑ Γ

Έστω ότι για μια συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύουν:

- $\left|f(x)-e^{x^2}-f(y)+e^{y^2}\right|\le(x-y)^2$, για όλα τα $x,y\in[0,+\infty)$.
- $e^{f(0)}=e\cdot f(0)$

Γ1. Να αποδείξετε ότι

i. Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^{x^2}$, $x\in[0,+\infty)$ είναι σταθερή στο $[0,+\infty)$.

ii. $f(x)=e^{x^2}$, $x\in[0,+\infty)$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και η αντίστροφη της είναι

$$f^{-1}(x)=\sqrt{\ln x},\quad x\ge1.$$

Γ3. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $0\le\alpha<1<\beta$ και $\alpha+\beta=2$ τότε

$$e^{\alpha^2}+e^{\beta^2}>2e.$$

Γ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^e e^{\sqrt{\ln x}}\,dx+\int_0^1 e^{x+x^2}\,dx=e^2-1$$

Μονάδες [(5+4)+4+6+6]=25

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x\alpha^{x}, & x<0 \\ \eta\mu x + x^2, & 0\le x\le \pi \end{cases}, \qquad \alpha>0$$

για την οποία ισχύει

$$f(x)\ge f(-1), \qquad \text{για κάθε } x\in(-\infty,\ \pi].$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=e$ και να βρείτε τα ακρότατα και το σύνολο τιμών της f.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Δ3. Ένα σημείο $M(x,\ y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x\in(0,\ \pi]$.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $N\left(\frac{\pi}{2},\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, η τετμημένη του σημείου Μ μεταβάλλεται με ρυθμό 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Αν Κ είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $y'y$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΚΜ, όπου $O(0,0)$, τη χρονική στιγμή t_0.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x)=x^2+\frac{\kappa}{x}, \quad \text{με } \kappa\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

έχουν 2 ακριβώς κοινά σημεία στο διάστημα $(0,\ \pi)$.

Μονάδες (6+6+6+7)=25