



## ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

1

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$   
και
- κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή  
 $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 5

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται “1-1”;

Μονάδες 3

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

« Έστω συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν ισχύει ότι  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ , τότε η  $f$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}^*$  ».

- α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. Μονάδα 1
- β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. Μονάδες 3

Μονάδες 4

**A4.** Αν  $f'(x) = g'(x)$  για κάθε  $x \in [-1,1]$  και  $f(0) = g(0) + 2$ , τότε για κάθε  $x \in [-1,1]$  ισχύει:

**A.**  $f(x) = g(x) - 2$

**B.**  $\int_{-1}^1 (f(x) - g(x))dx = 4$

**Γ.**  $f(x) \leq g(x), x \in [-1,1]$

**Δ.** Οι  $C_f, C_g$  έχουν κοινό σημείο στο  $[-1,1]$

Μονάδες 3

**A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = -x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy'$  και  $x'Oy$ .

**β.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η συνάρτηση  $f + g$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ .

**γ.** Αν  $a > 0$  τότε:  $(a^x)' = x \cdot a^{x-1}$ .

**δ.** Οι ρητές συναρτήσεις  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , με βαθμό του αριθμητή  $P(x)$  μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

**ε.** Αν  $c > 0$ , και  $a < \beta$  τότε το  $\int_a^\beta c dx$  εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση  $\beta - a$  και ύψος  $c$ .

Μονάδες  $5 \times 2 = 10$

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**B1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**B2.** Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$

και

να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ ,

και

να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

**B4.** Αν  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση με τύπο

$$g(x) = |x + 2| + |x - 2|$$

να αποδείξετε ότι

η σύνθεση της συνάρτησης  $f$  με την συνάρτηση  $g$  είναι σταθερή συνάρτηση

και

να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες  $(5+6+7+7)=25$

## ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = \begin{cases} (e^x - 1) \cdot \ln x, & x > 0 \\ \kappa, & x = 0 \end{cases}$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\kappa = 0$ .

**Γ2.** Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι

η  $f$  είναι κυρτή στο διάστημα  $[1, +\infty)$

και

να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο της  $A(1, f(1))$

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι

για κάθε  $x > 1$ ,

ισχύει :

$$\frac{e^x - 1}{e - 1} > \frac{x - 1}{\ln x}.$$

**Γ5.** Να αποδείξετε ότι

υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (0, 1)$

για το οποίο ισχύει :

$$e^\xi \cdot \ln(e \cdot \xi^\xi) = 1$$

Μονάδες  $(5+4+5+5+6)=25$

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{e^x}, \quad x > 0.$$

**Δ1.** Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών.

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι

η εξίσωση

$$f(x) = \frac{1}{3}$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  με

$$0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$$

και στη συνέχεια ότι

$$\text{υπάρχει ένα τουλάχιστον } x_0 \in (\rho_1, \rho_2)$$

τέτοιο ώστε

$$3f(x_0) = 1 + f'(x_0).$$

**Δ3.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 xe^{-x} dx$$

και

στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι:

$$\int_1^2 f(x) dx < \frac{2e-3}{e^2}.$$

**Δ4.** Αν

$F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $(0, +\infty)$ ,

να αποδειχθεί ότι

$$\text{για κάθε } x > 0$$

ισχύει:

$$F(x+1) + F(x+3) < 2F(x+2).$$

Μονάδες (6+6+6+7)=25

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

- 1.** Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το Εξεταζόμενο μάθημα.  
Στο εσόφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή.  
Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα.  
Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομα σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.  
Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.  
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιό σας και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.  
Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5. Διάρκεια εξέτασης:**  
τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6 Χρόνος δυνατής αποχώρησης:**  
δυο (2) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**Σ Α Σ Ε Υ Χ Ο Μ Α Σ Τ Ε Κ Α Λ Η Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α****Τ Ε Λ Ο Σ Μ Η Ν Υ Μ Α Τ Ο Σ**